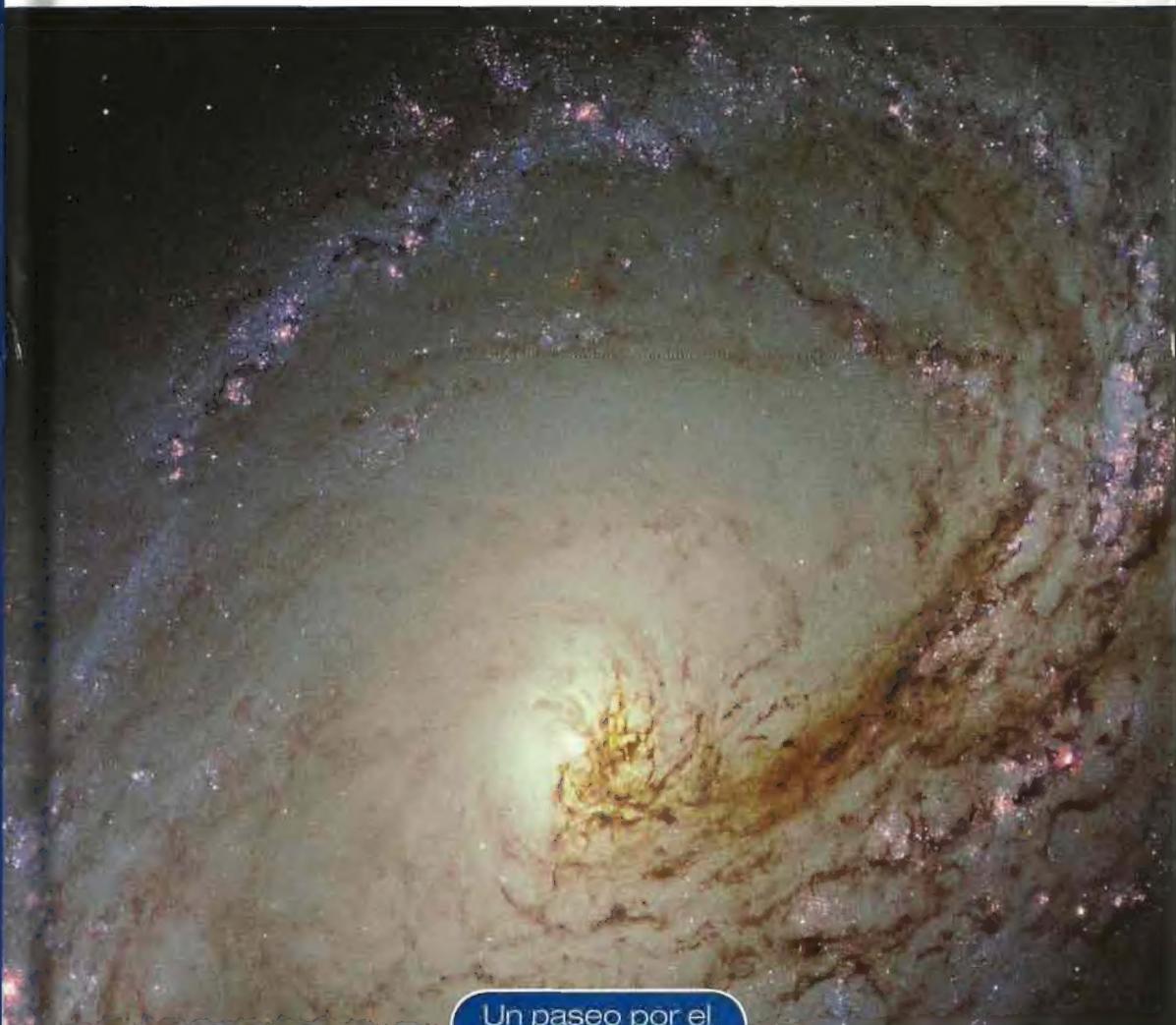


# La teoría del caos

Las leyes de lo impredecible



Un paseo por el  
**COSMOS**



The Doctor y La Comunidad

Redigitalización: The Doctor

<http://thedoctorwho1967.blogspot.com.ar/>

<http://el1900.blogspot.com.ar/>

<http://librosrevistasinteresesanexo.blogspot.com.ar/>

<https://labibliotecadeldrmoreau.blogspot.com/>

# La teoría del caos

Las leyes de lo impredecible

## **SUMARIO**

---

<b>INTRODUCCIÓN</b>	7	
<b>CAPÍTULO 1</b>	La atmósfera y el sistema solar: caos en la tierra y en el cielo	13
<b>CAPÍTULO 2</b>	¿Qué es el caos?	45
<b>CAPÍTULO 3</b>	¿Qué tiene de extraño un atractor extraño?	77
<b>CAPÍTULO 4</b>	Caos clásico y caos cuántico	111
<b>CAPÍTULO 5</b>	Aplicaciones del caos	147
<b>LECTURAS RECOMENDADAS</b>		167
<b>ÍNDICE</b>		169

El 2 de agosto de 2027 habrá un eclipse total de Sol que será visible en España, Marruecos, Libia, Argelia, Egipto, Arabia Saudí, Yemen y Somalia. El eclipse comenzará a las 8 horas, 41 minutos y 36 segundos (tiempo universal) y finalizará a las 11 horas, 27 minutos y 41 segundos; su fase máxima tendrá lugar a las 10 horas y 6 minutos.

Tales de Mileto predijo un eclipse el 28 de mayo de 585 a.C. No es que tengamos documentos históricos de tanta precisión, sino que, al igual que podemos calcular lo que ocurrirá en el futuro, también podemos calcular lo que ocurrió en el pasado. Los astrónomos han determinado que en esa fecha hubo un eclipse total de Sol visible desde Asia Menor, y durante muchos años no hubo otro de similares características visible en la zona, por lo que debió de ser ese el que Tales predijo.

La mecánica clásica es determinista. Rige el movimiento de planetas, satélites y proyectiles. Sus leyes fueron establecidas por Galileo y Newton, y desarrolladas durante los siglos XVII, XVIII y XIX por físicos y matemáticos. Conocidas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, y dadas su posición y su velocidad iniciales, las leyes de la mecánica clásica permiten calcular con toda precisión su trayectoria futura. Eso es el determinismo.

El determinismo absoluto dentro de la física empezó a ser cuestionado a finales del siglo XIX por teóricos como Ludwig Boltzmann, que introdujeron el concepto de probabilidad para dar una interpretación mecánica a la termodinámica. La concepción de Boltzmann utilizaba la mecánica clásica para describir el movimiento de las moléculas, por ejemplo, en los choques entre dos moléculas en un gas. Pero aunque estos choques siguieran una dinámica estrictamente determinista, la descripción global de un cuerpo macroscópico no dependía del movimiento detallado de sus moléculas, sino de promedios estadísticos sobre un gran número de ellas. Y ahí entraba la teoría de probabilidades. El determinismo sufrió una revisión aún más profunda con el advenimiento de la mecánica cuántica y, en particular, del principio de incertidumbre de Heisenberg. Según Heisenberg, en mecánica cuántica no podemos predecir con absoluta certeza la posición de una partícula, solo dar la probabilidad de que se encuentre en determinado punto del espacio. Podemos hacer predicciones, y de hecho las predicciones de la mecánica cuántica se encuentran entre las más precisas nunca realizadas, pero no determinar la trayectoria de una partícula con absoluta precisión. En realidad, el concepto de trayectoria de una partícula carece de sentido en mecánica cuántica.

Exceptuando las cuestiones estadísticas suscitadas por Boltzmann, la mecánica newtoniana, que rige el movimiento de los cuerpos macroscópicos y, por tanto, la física de nuestro día a día, parecía ajena a estos ataques al determinismo. El primero que vislumbró que también la mecánica clásica podía no ser tan determinista como se daba por cierto fue el gran matemático y físico francés Henri Poincaré. En el curso de sus investigaciones sobre el problema de los tres cuerpos sometidos a su mutua atracción gravitatoria, que le valió un premio convocado por el rey Óscar II de Suecia, Poincaré encontró que había situaciones en las que no era posible dar una solución cerrada a las trayectorias de los planetas. Además, vislumbró el primer ejemplo de trayectoria caótica.

Pero no fue hasta mediados del siglo XX cuando lo que hoy conocemos como caos determinista hizo su irrupción definitiva.

Y lo hizo más o menos simultáneamente en varios países y en varias disciplinas. Físicos y matemáticos fueron los artífices de esta tercera revolución de la física del siglo XX, tras la relatividad y la mecánica cuántica, pero también participaron en ella biólogos, químicos y economistas, y la aparición de los primeros ordenadores fue una de las claves de esta irrupción. Los ordenadores permitían abordar problemas que los métodos tradicionales de la física y las matemáticas no habían podido resolver.

El caos determinista se presenta cuando un sistema sometido a leyes o reglas perfectamente determinadas se comporta de manera errática y, aparentemente, aleatoria. El comportamiento dinámico de un sistema caótico determinista tiene características diferentes a las de un sistema puramente aleatorio, y a lo largo de la segunda mitad del siglo XX los científicos fueron hallando y definiendo estas características. La más importante de todas ellas es la sensibilidad a las condiciones iniciales: dos estados inicialmente muy próximos pueden dar lugar a estados futuros completamente separados. Aunque la sensibilidad a las condiciones iniciales fue prevista por Poincaré, fue el meteorólogo estadounidense Edward Lorenz el primero en desarrollar un sistema caótico determinista que poseía esta propiedad. Para ilustrar la sensibilidad a las condiciones iniciales, Edward Lorenz acuñó la expresión «efecto mariposa», que hoy en día ha trascendido el campo de las matemáticas.

Además de la sensibilidad a las condiciones iniciales, los sistemas caóticos deterministas exhiben otras propiedades características como son la recurrencia, la autosimilaridad y la fractalidad. La recurrencia se refiere a que el sistema vuelve una y otra vez a estados muy similares al de partida. La autosimilaridad y la fractalidad se explicarán a lo largo de esta obra.

El sistema solar y la atmósfera son sistemas caóticos, aunque lo son en diferentes escalas de tiempo. Ambos están entre los primeros sistemas caóticos estudiados. El sistema solar fue el objeto de estudio en que Poincaré halló por primera vez algunos de los elementos del caos. Los ordenadores permitieron, a finales del siglo pasado, estudiar el movimiento del sistema solar en detalle y calcular su futuro a millones de años vista. Se reveló

entonces que el futuro del sistema, en esa escala de tiempo, es incierto e impredecible. La atmósfera también es caótica y Lorenz fue de los primeros científicos en tratar de cuantificar este hecho, recurriendo también al cálculo por ordenador.

No es necesario que un sistema dependa de un gran número de variables para que su comportamiento pueda ser caótico. Este es uno de los descubrimientos más relevantes de la teoría del caos. En el caso de sistemas cuya evolución depende de forma continua del tiempo bastan, de hecho, solo tres variables para que el caos sea posible. Esto permite mostrar las características esenciales del caos determinista en sistemas relativamente simples, como un péndulo o una pelota que bota sobre una mesa que vibra. En uno de los problemas estudiados por Poincaré, se trataba de un planeta que orbita entre otros dos. Las tres variables involucradas son las dos coordenadas del planeta en el plano de la órbita y su velocidad. El biólogo teórico Robert May estudió un modelo aún más simple, con una sola variable. El contexto era la dinámica de poblaciones y en su modelo la única variable era el número de individuos de una especie dada. Una sencilla función matemática establecía la población de una generación conocido el número de individuos de la generación anterior. May encontró que, bajo determinadas condiciones, el número de individuos de la población podía variar erráticamente de una generación a otra, es decir, se comportaba de manera caótica. El físico Mitchell Feigenbaum estudió el mismo modelo y demostró que representaba una evolución hacia el caos que estaba caracterizada por cantidades universales, en el sentido de que no dependían de la forma detallada de la función matemática utilizada en el modelo.

La evolución en el tiempo de un sistema cualquiera puede representarse gráficamente. Por ejemplo, podríamos representar en un plano todas las órbitas posibles de un planeta en torno al Sol, dependiendo de su posición y velocidad en un momento dado. En ese caso podríamos llenar el plano con todas las trayectorias posibles. Pues bien, cuando se representa gráficamente la evolución de un sistema caótico aparece un objeto geométrico muy peculiar: el atractor extraño. Un atractor extraño es un objeto que no llena completamente el volumen o el área que ocu-

pa. Se dice que un atractor extraño es fractal. Las líneas que lo recorren, las trayectorias posibles del sistema que representa, se separan y se unen a la vez. Las propiedades matemáticas de los atractores extraños son, como veremos, claramente singulares.

Los atractores extraños aparecen en sistemas que disipan energía y que precisan de un aporte continuo de energía desde el exterior. Por ejemplo, el movimiento atmosférico toma su energía del calentamiento solar, y la viscosidad del aire se encarga de disipar la energía en los torbellinos o en el rozamiento con el suelo. Pero el caos también existe en sistemas que no disipan energía, como el propio sistema solar. Es a una prodigiosa generación de matemáticos de la Rusia soviética a quienes debemos una buena parte de la teoría del caos en los sistemas de este tipo, en los que la energía total se conserva, y que reciben el nombre genérico de *sistemas conservativos*.

Cuando la teoría del caos determinista empezó a tomar forma, la mecánica cuántica ya era una teoría madura. Surgió muy pronto la pregunta de cómo influía el caos en mecánica cuántica. Dicho de otro modo, ¿qué ocurre en los sistemas cuánticos cuyo correspondiente sistema clásico es caótico? La sensibilidad a las condiciones iniciales, una de las claves del caos determinista, no puede estar presente en la mecánica cuántica, porque, como hemos dicho, el concepto de trayectoria no tiene cabida. De alguna forma, la mecánica cuántica limita o suaviza el caos. Pero las consecuencias del caos sí se dejan sentir en algunas características, como la distribución de los niveles de energía en los sistemas cuánticos caóticos.

Los conceptos matemáticos elaborados para entender el caos determinista han encontrado aplicación en otros campos de la ciencia, más allá de la física y las matemáticas. La biología, la química e incluso la economía han hallado en las matemáticas del caos herramientas para estudiar sus propios sistemas. Como ha demostrado la teoría del caos, un sistema que se comporta de manera irregular no tiene por qué ser extremadamente complicado, quizás baste seguir la evolución de solo unas pocas variables para describir ese comportamiento. Esta idea de partida ha motivado numerosos estudios en todas estas disciplinas con diversa fortu-

na. Se han encontrado reacciones químicas que siguen las leyes del caos determinista y su comportamiento complejo se puede explicar a partir de unas pocas variables. También se han construido circuitos electrónicos caóticos y se usa el caos para determinadas tareas en ciertos microdispositivos. Pero la existencia del caos determinista y su interés en biología ha quedado patente solo en algunos casos. Y mucho más discutible es su aplicabilidad e interés en economía, aunque algunas herramientas matemáticas desarrolladas en el contexto del caos determinista han sido incorporadas plenamente por los economistas.

*Caos* es una palabra antigua, de origen griego. Significa «confusión, desorden». Su antónimo original es *cosmos*, también de origen griego, que significa «orden». Así, según la Biblia, reinaba el caos antes de que Dios pusiera orden en las cosas, creando el cosmos. Pero el uso, el tiempo y, a veces, también la ciencia, van modificando el sentido de las palabras, ampliándolo, matizándolo. La expresión *caos determinista* es, en cierta forma, una contradicción en sí misma, pero ilustra un tipo de comportamiento muy atractivo, equidistante del caos absoluto y del determinismo absoluto. Justo donde suceden las cosas interesantes. Es un comportamiento irregular, pero que sigue reglas definidas. Parcialmente predecible, parcialmente impredecible, pero con normas y estructuras subyacentes. Como la vida misma.

## CAPÍTULO 1

# La atmósfera y el sistema solar: caos en la tierra y en el cielo

En un sistema caótico las magnitudes físicas varían de forma errática en el tiempo. En el caos determinista este comportamiento errático es debido a reglas perfectamente definidas, determinadas. Dos ejemplos característicos de caos determinista son el sistema solar y el tiempo atmosférico.

Cuenta una antigua leyenda china que había una región llamada Qi cuyos habitantes se preguntaban si algún día el cielo caería sobre sus cabezas. Les preocupaba que el Sol y las estrellas dejaran de moverse y se precipitaran sobre la Tierra. Esa preocupación se extendió por toda la región hasta tal punto que sus habitantes empezaron a olvidarse de todo, incluso de las actividades más necesarias, como son dormir y comer. Los qítas se pasaban el día mirando al cielo, temerosos de que les cayera encima. Esta leyenda se usa habitualmente en China para advertir de los peligros de las preocupaciones sin sentido y los qítas son vistos, por lo tanto, como un ejemplo de imbecilidad.

Sin embargo, nuestra civilización debe mucho a los grandes personajes que a lo largo de la historia se han planteado, de una u otra forma, la misma pregunta que los qítas. Podemos recordar aquí a Tomás de Aquino (ca. 1224-1274), el famoso fraile y filósofo medieval. Para él era Dios, el primer motor, quien había puesto en movimiento los objetos celestes, y este movimiento era eterno e imperturbable. Si el cielo no se nos caía encima era por obra y gracia de Dios, que así lo había dispuesto.

El físico inglés Isaac Newton estableció su teoría de la gravedad a finales del siglo xvi. La teoría de Newton unificaba en una sola ley física dos fenómenos aparentemente distintos: la caída de un cuerpo en la Tierra y el movimiento orbital de planetas y satélites. La fuerza gravitatoria era la responsable de ambos movimientos. Según Newton, la Luna «caía» realmente a la Tierra, atraída por la misma fuerza que hace caer a una piedra, pero el movimiento de la Luna en dirección paralela a la superficie de la Tierra y la esfericidad de esta hacen que esta caída se transforme en un dar vueltas sin fin. Newton fue capaz de demostrar que la ley de la gravedad por él propuesta producía las órbitas elípticas que Kepler había observado en los planetas, pero no decía nada acerca del porqué de sus movimientos transversales. Si la Luna no estuviera animada de un movimiento transversal caería «a plomo» sobre nosotros, tal y como temían los quitas.

En este punto Newton, hombre profundamente religioso, recurrió a Dios, como siglos antes había hecho Tomás de Aquino. Dios, el creador, había animado los planetas y sus satélites con sus movimientos iniciales, lo que hacía posible que la Tierra y todos los planetas orbitaran alrededor del Sol, y la Luna alrededor de la Tierra. Pero había algo inquietante: la Tierra no era atraída solo por el Sol, sino también por el resto de los planetas. Como la masa del Sol es muchísimo más grande que la de cualquier otro planeta, su fuerza es la que manda, y los planetas describen sus órbitas alrededor de él. Pero estas órbitas no son elipses inmutables, como cabría esperar si cada planeta estuviera solo con el Sol en el universo, sino que están perturbadas por las fuerzas de atracción de los otros planetas. Estas fuerzas son muy pequeñas comparadas con la del Sol, casi imperceptibles, pero Newton comprendió que su acción continuada a lo largo de los siglos podía desbaratar el engranaje y dar al traste con todo. A falta de una explicación mejor, Newton, hijo de una época ajena a la idea de evolución, acudió de nuevo a Dios, al que otorgó el papel de vigilante del buen orden cósmico: era Dios el que, de vez en cuando, reajustaba las órbitas para que las pequeñas fuerzas entre los distintos cuerpos no rompieran el orden establecido.

Pero ¿cómo adquirieron la Luna y los planetas su movimiento transversal? Que sepamos, fue Immanuel Kant el primero que introdujo, un siglo después de Newton, la hipótesis de que el sistema solar había evolucionado a partir de una nebulosa. En la época de Kant el avance en la construcción de telescopios había permitido descubrir varias nebulosas: objetos no estelares de aspecto difuminado. Estas nebulosas inspiraron al filósofo la hipótesis, que, en lo esencial, se sigue considerando correcta hoy en día, de que el sistema solar se originó a partir de una inmensa nube de gas y polvo: la nebulosa solar. Los planetas y el Sol heredaron sus movimientos de traslación y rotación del giro que la nebulosa primordial efectuaba sobre sí misma. A medida que la nebulosa se contraía y se formaban los planetas, estos iban aumentando su velocidad de traslación, de forma análoga a la aceleración que experimenta el agua en el torbellino que se produce cuando escapa por el desagüe del lavabo. Una de las virtudes de esta hipótesis es que explica por qué todos los planetas orbitan en el mismo sentido: es el mismo sentido en que giraba la nebulosa sobre sí misma. ¡Menos trabajo para Dios!

## ¿ES INESTABLE EL SISTEMA SOLAR?

Pierre-Simon de Laplace, astrónomo y matemático francés de la época de la Revolución, estudió el movimiento de los planetas al detalle, intentando averiguar si las perturbaciones que unos ejercían sobre otros, esas que tanto inquietaban a Newton, terminarían por desbaratar el orden cósmico o si, por el contrario, sus órbitas eran estables a largo plazo. Laplace ideó métodos de cálculo aproximados para encontrar la órbita de un planeta perturbado por la presencia de otro y descubrió que los movimientos medios de los planetas eran constantes. Un caso que interesaba especialmente a los astrónomos era el de Júpiter y Saturno. Según las medidas de la época, Júpiter se aceleraba poco a poco, describiendo su órbita cada vez más rápidamente (hay que aclarar que estamos hablando de incrementos minúsculos en su velocidad orbital). A su vez, Saturno iba desacelerándose.

Laplace demostró que estas variaciones eran consecuencia de su atracción mutua y, lo más importante, que el comportamiento era periódico: cada 450 años la situación se revertía y era Júpiter el que se frenaba y Saturno el que se aceleraba. A los 900 años ambos volvían a su posición inicial.

El cálculo realizado con Júpiter y Saturno hizo creer a Laplace que las perturbaciones entre planetas no amenazaban la estabilidad del sistema solar, y así lo publicó en su estudio que presentó al mismísimo Napoleón con el título de *Tratado de mecánica celeste*. Napoleón era un amante de las ciencias, aficionado a las matemáticas, e impulsó la creación de varios centros de enseñanza superior en Francia. Según se cuenta, reprochó a Laplace que no hablara de Dios en su libro, a lo que este contestó: «No he necesitado esa hipótesis». Laplace había librado a Dios del trabajo newtoniano de readjustar las órbitas cada cierto tiempo.

Pero las cosas no eran tan fáciles, y a mediados del siglo xix la estabilidad del sistema solar de nuevo fue puesta en cuestión. El astrónomo francés Urbain Le Verrier, famoso por predecir la existencia del planeta Neptuno, amplió los cálculos de Laplace y se percató de que había perturbaciones más pequeñas que las consideradas por este que tal vez invalidaban los cálculos. Le Verrier se preguntó si estas pequeñas perturbaciones, en un principio menores, podían causar a largo plazo efectos devastadores. ¿Era lícito no tenerlas en cuenta?

Así, el problema fue uno de los temas del premio matemático que el rey Óscar II de Suecia convocó con motivo de su 60.º cumpleaños. El matemático sueco Gösta Mittag-Leffler había convencido al rey, muy interesado en las matemáticas, para que convocara el premio y lo dotara generosamente, de forma que atrajera a los mejores matemáticos de toda Europa. El premio consistía en una medalla de oro conmemorativa y dos mil quinientas coronas suecas. El matemático francés Henri Poincaré ganó el premio con una memoria titulada «Sobre el problema de los tres cuerpos y las ecuaciones de la dinámica». Volveremos más adelante a Poincaré y a su memoria ganadora del premio del rey Óscar porque esta forma parte de la historia del caos

determinista, pero por ahora digamos solo que una de las conclusiones de Poincaré fue que el problema era, en cierto modo, irresoluble. En otras palabras, a la pregunta: «¿Se nos caerá el cielo encima algún día?», la respuesta de Poincaré era: «No podemos saberlo con certeza».

Considerar el sistema solar como un todo es un problema formidable, aunque lo restrinjamos solo a los planetas y sus satélites más grandes. Habría que resolver la trayectoria de decenas de cuerpos en mutua atracción gravitatoria. De modo que Poincaré no se planteó en su trabajo el problema completo, sino una versión reducida de un problema más sencillo: el llamado *problema de los tres cuerpos*. El problema de los tres cuerpos consiste en encontrar las trayectorias de tres cuerpos masivos sometidos a mutua atracción gravitatoria. Pero incluso este problema en su forma general, sin poner restricciones a la masa y a las trayectorias de los cuerpos, es demasiado difícil. Así que Poincaré se planteó a fondo un problema más sencillo: el problema de los tres cuerpos restringido.

En su memoria, Poincaré escribió:

Imaginemos dos cuerpos, el primero de gran masa, el segundo de masa finita, pero muy pequeña, y supongamos que estos dos cuerpos describen en torno a su centro de gravedad común una circunferencia en un movimiento uniforme. Consideremos además un tercer cuerpo, de masa infinitamente pequeña, de forma que su movimiento se ve afectado por la atracción de los dos primeros cuerpos, pero él no puede afectar la órbita de estos dos primeros cuerpos. Limitémonos además al caso en que este tercer cuerpo se mueve en el plano de las circunferencias descritas por los dos primeros cuerpos. Este es el caso de un pequeño planeta que se mueve bajo la influencia de Júpiter y del Sol cuando se desprecia la excentricidad de Júpiter y la inclinación de las órbitas. Este es el caso también de la Luna moviéndose bajo la influencia del Sol y de la Tierra cuando se desprecia la excentricidad de la Tierra y la inclinación de la órbita de la Luna respecto de la eclíptica.

También sería el caso, por ejemplo, de una de las naves Apolo en su viaje de la Tierra a la Luna.

Los modernos ordenadores permiten resolver numéricamente el problema con mucha precisión. Los ordenadores no proporcionan una fórmula matemática de la trayectoria del planeta, sino que, utilizando algoritmos especialmente diseñados, dan los valores numéricos de la posición del planeta en sucesivos instantes de tiempo previamente escogidos. Poincaré no tenía ordenador, pero sí una gran perspicacia y una profunda intuición matemática. Uno de sus muchos descubrimientos fue darse cuenta de que había dos tipos de soluciones. Por un lado, aquellas que podríamos llamar regulares: trayectorias normales que admiten bien una solución explícita o bien aproximaciones suficientemente buenas. Pero, por otro lado, había trayectorias que no seguían esa pauta. Y esas trayectorias no regulares impedían resolver de manera general el problema de los tres cuerpos y, por extensión, el del sistema solar como un todo. Hoy en día iluminaríamos caóticas a estas soluciones. En el caso del sistema solar la clave del problema estaba, como Poincaré explicaba en su memoria, en las resonancias.

### Las resonancias perturban las órbitas planetarias

La palabra *resonancia* describe un gran número de fenómenos en campos muy diversos, alguno de los cuales incluso ha entrado a formar parte del habla cotidiana, como, por ejemplo, la resonancia magnética nuclear. La resonancia se produce en sistemas que presentan algún tipo de comportamiento periódico. Las resonancias mecánicas son las más sencillas y se dan entre dos cuerpos que tienen la misma frecuencia natural de oscilación. Pensemos en una guitarra bien afinada en la que pulsamos una cuerda. Esta oscila con una frecuencia que viene determinada por el material del que está hecha, su grosor y su longitud. Si acercamos esta guitarra a otra guitarra que esté bien afinada, observaremos que esta última, que no hemos tocado, también suena levemente. El sonido de la cuerda que hemos hecho vi-

brar ha excitado oscilaciones en la cuerda de la guitarra que no hemos tocado. Para que este fenómeno ocurra, las dos cuerdas deben estar bien afinadas, es decir, vibrar, de manera natural, exactamente a la misma frecuencia.

Otro fenómeno resonante al que estamos habituados en nuestra vida diaria es la sintonización de una emisora de radio. Las emisoras de radio emiten ondas electromagnéticas que se propagan por el aire hasta nuestros receptores. Cada emisora tiene una frecuencia característica de emisión, asignada por las autoridades competentes. En el caso de la FM estas frecuencias están en el rango de los cientos de megahercios. Pues bien, cuando giramos el dial de nuestro receptor estamos ajustando la frecuencia de oscilación de un circuito eléctrico interior para que oscile exactamente a la misma frecuencia de la emisora que queremos oír. El circuito entra así en resonancia con la onda entrante y produce una señal eléctrica que es amplificada, demodulada y transmitida a los altavoces.

Volvamos al sistema solar. Las resonancias entre dos cuerpos se dan cada vez que sus períodos orbitales, esto es, el tiempo que tardan en completar una vuelta alrededor del Sol, están en una razón que sea un número racional, por ejemplo 1:2, 2:3, 3:5, etc. Supongamos, para fijar las ideas, que tenemos dos planetas imaginarios, el planeta A y el planeta B, cuyos períodos orbitales son, respectivamente, 40 y 60 años. La razón entre ambos períodos es de 2:3. Si partimos de una posición en la que los dos planetas están alineados con el Sol, como en el primer dibujo de la figura 1, al cabo de 120 años el planeta A habrá dado tres vueltas completas, y el planeta B dos vueltas completas, con lo que ambos se encontrarán de nuevo en la misma posición relativa. Supongamos que el planeta B es muy masivo y el A es más bien pequeño. El resultado de esta situación es que cada 120 años el planeta B tirará levemente del A alejándolo del Sol. El efecto puede ser muy pequeño, porque la atracción solar es mucho más importante, pero se produce periódicamente, cada 120 años, con lo que tiene un efecto acumulativo que terminará por sacar a A de su órbita.

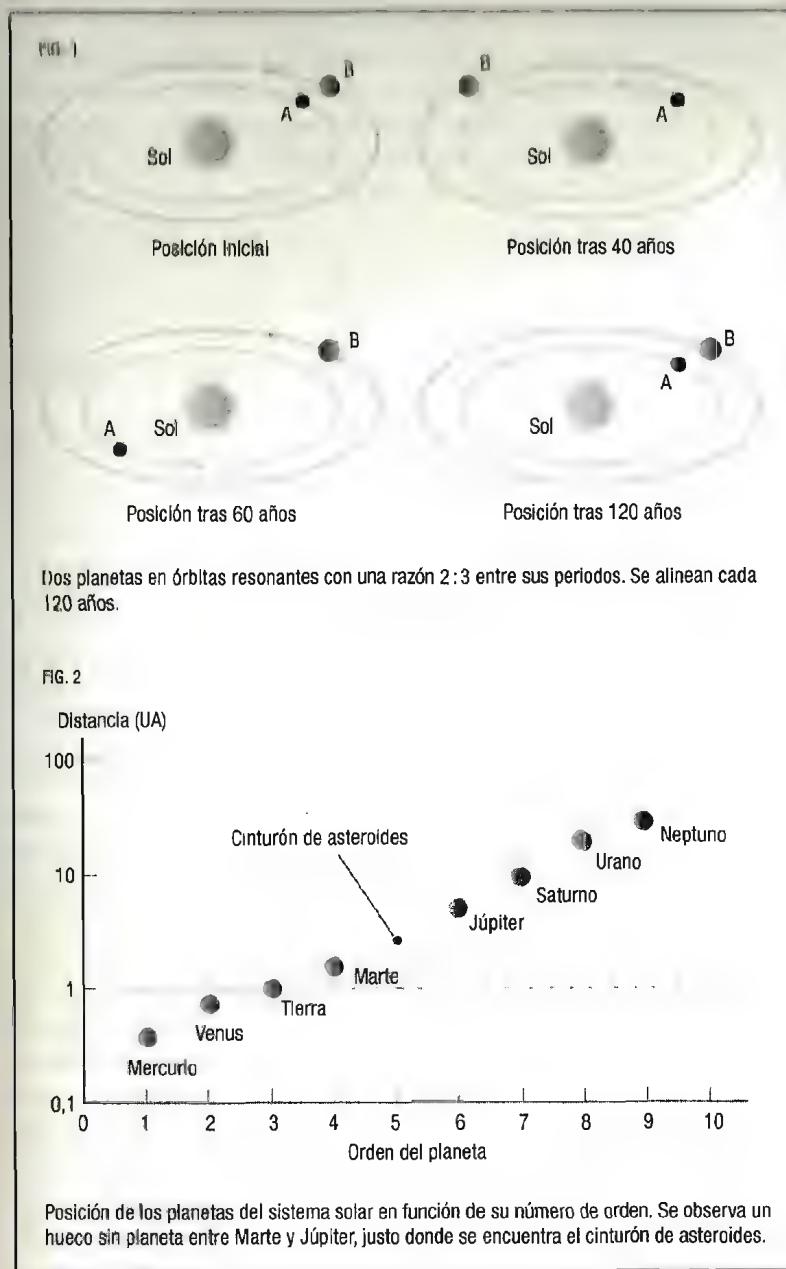
Una de las consecuencias más notables de la existencia de las resonancias gravitatorias en el sistema solar es la existen-

cia del cinturón de asteroides. Además, las resonancias también determinan la disposición de los asteroides dentro del cinturón. Veamos cómo ocurre esto.

Las distancias de los planetas al Sol siguen aproximadamente una regla, conocida como ley de Titius-Bode. La figura 2 muestra la distancia de los planetas al Sol en función de su número de orden tomando a Mercurio como el primero. Se observa que estas distancias siguen una pauta clara, pero entre Marte y Júpiter parece haber un hueco que no ha sido ocupado por ningún planeta.

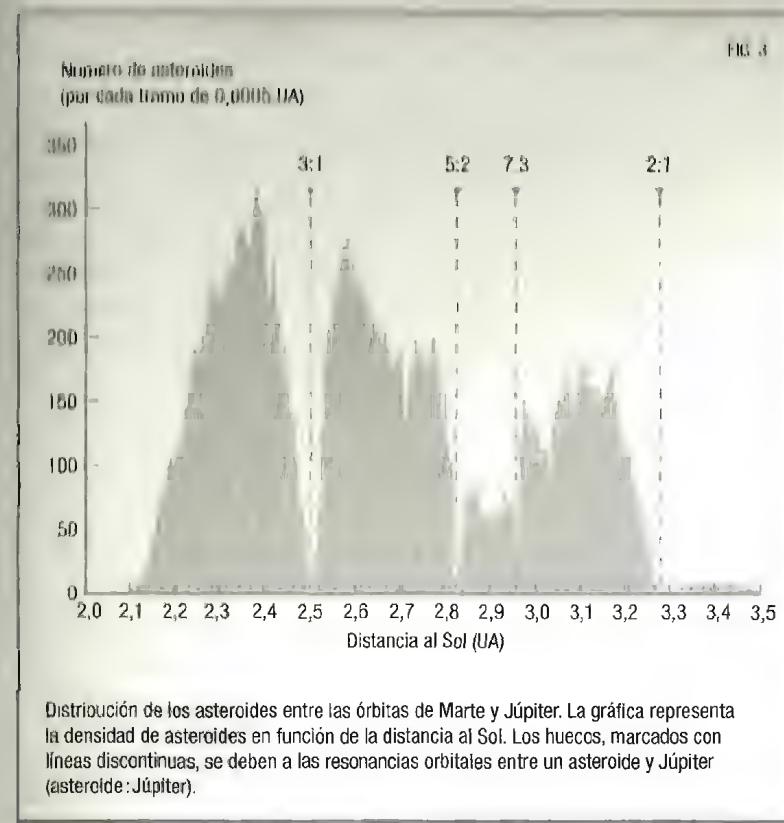
Este hueco está ocupado por un gran número de pequeños cuerpos rocosos, los asteroides. Estos ocupan una zona en la que hay varias órbitas que están en resonancia con la órbita de Júpiter. A la distancia de 3,28 UA, la órbita de un astro tiene un periodo que es justo la mitad del de Júpiter. Esto significa que un objeto que estuviera orbitando a esa distancia del Sol encontraría a Júpiter en la misma posición cada dos vueltas (resonancia 2:1). En esta circunstancia la atracción gravitatoria del planeta, el segundo objeto más masivo del sistema solar, daría un pequeño tirón del hipotético astro cada vez que se encontraran, y como la posición relativa sería siempre la misma, el efecto de los tirones se iría acumulando, hasta sacar al objeto de esa órbita y enviarlo a una órbita no resonante.

La gráfica de la figura 3 muestra la distribución de los asteroides en función de la distancia al Sol. Vemos que en la posición de la resonancia 2:1 no hay casi asteroides y que hay muy pocos en las órbitas más cercanas. La máxima concentración de asteroides se produce en puntos alejados de órbitas resonantes. A las distancias a las que hay otras resonancias la concentración de asteroides es casi nula. Ello ocurre, por ejemplo, en la distancia 2,5 UA, en la que el periodo de revolución alrededor del Sol es un tercio del de Júpiter, es decir, un objeto en esa órbita encuentra a Júpiter en la misma posición cada tres vueltas alrededor del Sol (resonancia 3:1). La existencia de órbitas resonantes entre Marte y Júpiter ha impedido la formación de un gran planeta en esa área. Es una zona fuertemente perturbada por la presencia del mayor planeta del sistema.



Puede pensarse que la existencia de órbitas resonantes es un fenómeno muy particular, que afecta solo a ciertas posiciones y que no debería tener influencia en el sistema solar como un todo. Pero Poincaré se dio cuenta de que el problema de las resonancias tenía consecuencias profundas cuando se trataba de calcular el comportamiento de un planeta a muy largo plazo. Como hemos dicho, siempre que el cociente de los períodos de dos planetas sea un número racional tendremos una resonancia. Las resonancias asociadas a números como 1:2 o 2:3 son muy fuertes y tienen consecuencias evidentes. Pero resonancias como 17:53 también se harán notar cuando el planeta de periodo más corto haya dado varias veces 53 vueltas. Es decir, es cuestión de tiempo, de que pase suficiente tiempo. Y el tema de la estabilidad del sistema solar también es cuestión de tiempo: queremos saber qué va a pasar con él en el futuro lejano. Poincaré demostró que, puesto que fueran cuales fueran los períodos de dos planetas su cociente siempre iba a estar cerca de algún número racional, era imposible, en general, encontrar una solución regular, por muy altos que fueran los números que formaran la fracción. Dicho en lenguaje técnico: Poincaré demostró que el desarrollo en serie de las soluciones a las ecuaciones de movimiento no era uniformemente convergente.

Poincaré respondió a la pregunta de Le Verrier de forma negativa: en general, no se pueden despreciar las resonancias pequeñas en un estudio a tiempos muy largos. El matemático francés replanteó completamente los métodos de la mecánica. Demostró que no es posible encontrar una solución analítica, una solución expresada en términos de funciones matemáticas conocidas, que represente el movimiento planetario en un intervalo infinito de tiempo. También demostró que la consideración de términos cada vez más pequeños en la interacción entre los planetas, la suma del efecto de más y más resonancias, no tenía por qué conducir a un valor finito. Esto tiene que ver con el problema matemático de sumar infinitos términos muy pequeños: el resultado puede ser un valor finito o infinito. Poincaré demostró que no siempre la suma de todos los efectos que afectan a la órbita de un planeta da una órbita definida.



Distribución de los asteroides entre las órbitas de Marte y Júpiter. La gráfica representa la densidad de asteroides en función de la distancia al Sol. Los huecos, marcados con líneas discontinuas, se deben a las resonancias orbitales entre un asteroide y Júpiter (asteroide: Júpiter).

La consecuencia física de estas dificultades matemáticas es el caos. Determinadas órbitas pueden comportarse de forma errática en el tiempo, sufriendo variaciones que son, en apariencia, indistinguibles de un movimiento aleatorio. Podemos servirnos de nuestros modernos ordenadores para explorar algunas de las consecuencias de la no regularidad del movimiento de los planetas. En la figura 4 se muestran dos trayectorias posibles del cuerpo de masa despreciable en el problema restringido de los tres cuerpos, el que abordó Poincaré en su memoria del premio del rey de Suecia. Este ejemplo muestra una de las características esenciales de los sistemas caóticos: la *sensibilidad a las condiciones iniciales*. Las dos trayectorias parten de pun-

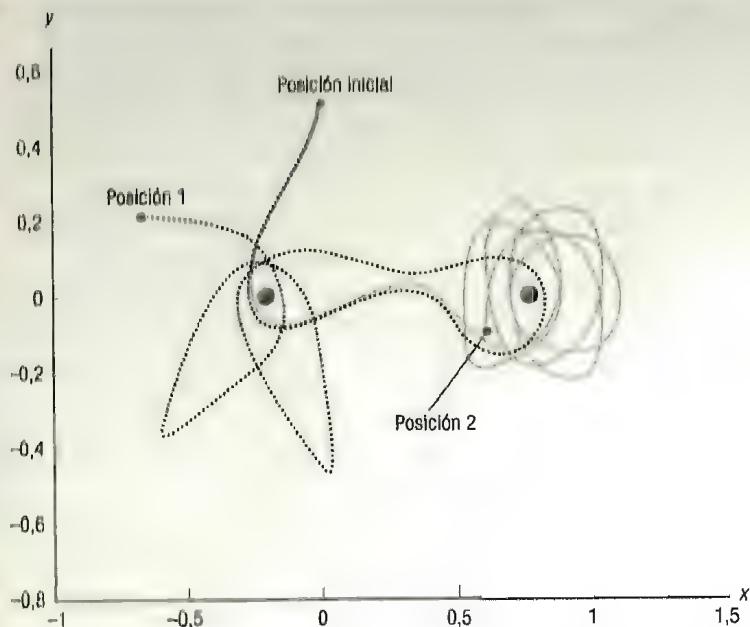


FIG. 4  
Dos trayectorias del cuerpo de masa despreciable en el problema restringido de los tres cuerpos. Las trayectorias difieren muy poco en su posición inicial. Las pequeñas diferencias en la posición inicial se traducen en trayectorias muy diferentes. Una de las trayectorias rodea el planeta de la izquierda y queda orbitando varias veces el de la derecha. La otra trayectoria vuelve al planeta de la izquierda tras una breve excursión por el de la derecha.

tos muy próximos, pero, al cabo de varias vueltas alrededor de uno y otro planeta, se separan hasta dar lugar a dos trayectorias completamente diferentes.

Además, el problema de los tres cuerpos muestra otra de las señas de identidad del caos determinista: la *recurrencia*. El cuerpo pequeño está atrapado gravitatoriamente por los dos planetas mayores. Aunque su trayectoria sea errática no se pierde en el infinito, sino que vuelve una y otra vez a dar la vuelta alrededor de uno u otro de los centros de atracción. Sensibilidad a las condiciones iniciales y recurrencia son dos de los ingredientes esenciales del caos determinista.

## El sistema solar es caótico

El advenimiento de los ordenadores a mediados del siglo xx significó una revolución en todas las disciplinas científicas. Gracias a ellos fue posible resolver de forma numérica sistemas de ecuaciones que hasta entonces habían sido inmanejables, ya fuera por su complejidad o, simplemente, por el número de ecuaciones. Lógicamente los astrónomos, como todos los demás científicos, comenzaron a utilizar la nueva herramienta para abordar problemas que hasta entonces habían sido inabordables. El comportamiento del sistema solar como un todo era uno de esos problemas.

El Bureau des Longitudes se creó durante la Revolución francesa, el 7 mesidor del año III (25 de junio de 1795). Su objetivo, así declarado por la Convención Nacional, era arrebatar el control de los mares a los ingleses. Para ello era necesario mejorar notablemente el cálculo de las longitudes en alta mar, un cálculo de vital importancia para la navegación segura y eficiente. Entre los fundadores del organismo estaban Lagrange y Laplace. Un siglo después de su creación, Henri Poincaré tuvo el honor de presidirlo.

Desde tiempos inmemoriales el ser humano se ha servido de la astronomía para orientarse, tanto en tierra como en el mar. Las estrellas siempre han guiado a los marinos, y no pocos avances científicos están ligados a la navegación. Si el cálculo de la latitud de un lugar a partir de observaciones astronómicas es relativamente fácil (basta observar la altura de la estrella Polar sobre el horizonte o medir la altura del Sol a mediodía), conocer la longitud es un problema mucho más complejo. Su cálculo se obtiene midiendo la diferencia horaria entre un lugar conocido (el puerto de partida, por ejemplo) y la posición en la que el navío se encuentra en un momento determinado. El problema no se resolvió completamente hasta que el inglés John Harrison inventó a mediados del siglo xviii su cronómetro marino, que funcionaba con precisión incluso en las tormentas más severas, como demostró el capitán Cook en uno de sus viajes alrededor del mundo.

El conocimiento preciso de las efemérides astronómicas, las coordenadas de los planetas y las estrellas en el cielo para cada

## EQUACIONES DIFERENCIALES Y SU SOLUCIÓN NUMÉRICA

Una ecuación diferencial es aquella que describe cambios en la función en función de la variable independiente. La función que se describe es una función diferencial, es decir, una función que depende de otra función.

### Ritmo de cambio constante

Supongamos que la nieve que cae cae constante sobre un prado, y que lo hace a un ritmo constante. Es decir, cada vez que se pasa en el tiempo a ese mismo ritmo, por lo que podemos escribir la derivada esencial para la variable  $y$  de la altura  $y(t)$  de la nieve en función del tiempo:

$$\frac{dy}{dt} = a.$$

En este caso, expresamos que la derivada de la función  $y(t)$  es una constante y su solución es una función lineal de la forma  $y(t) = at + b$ . Si cuando empezó a nevar no había nada de nieve, la altura de la nieve toma el valor cero. La altura de la nieve aumenta así de forma proporcional a la derivada de la función.

### Ritmo de cambio proporcional a la magnitud

Un tipo de ecuación que representa una magnitud cuyo valor crece proporcionalmente con el mismo. Muchas situaciones naturales se aproximan muy bien por una ley de este tipo en ciertas etapas. Bacteria en un cultivo, el número de átomos de uranio que se dividen en una reacción nuclear en cadena, el número de individuos de una población sin restricciones, etc. La ecuación diferencial que expresa un crecimiento de este tipo es:

$$\frac{dy}{dt} = ry, \quad [1]$$

donde  $r$  es una constante que representa el factor de crecimiento. La solución de esta ecuación se corresponde con un crecimiento exponencial de la magnitud representada por  $y$ :

$$y(t) = y(0)e^{rt},$$

donde  $y(0)$  es el valor inicial.

### Resolución numérica

Para resolver una ecuación diferencial numéricamente usando un ordenador es necesario fijar una tasa discreta de instantes de tiempo, ya que el ordenador solo puede dar un número finito de valores. Recordemos que la derivada se define como un límite:

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}.$$

En la figura vemos el efecto del paso de los instantes de tiempo en el error. Los datos se han tomado de la ecuación [1]. La figura muestra que la derivada numérica es igual a la derivada analítica por cada instante de tiempo, es decir, cumpliendo con el criterio de convergencia por los instantes. Así, la ecuación [1] es la formulación:

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = ry(t).$$

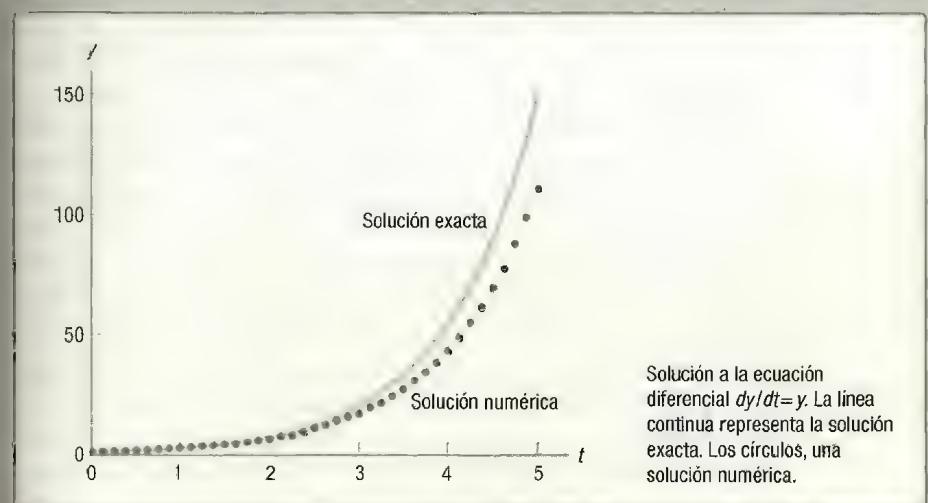
Despejando  $y(t + \Delta t)$ , obtenemos el valor de la función en sucesivos instantes separados por un intervalo de tiempo  $\Delta t$ :

$$y(t + \Delta t) = y(t)(1 + r\Delta t).$$

La aproximación será tanto mejor cuanto más pequeño sea el intervalo de tiempo  $\Delta t$  que hemos considerado.

### Representación de las soluciones

La figura muestra la solución analítica a la ecuación [1] (línea continua) para  $r=1$ , junto con la solución numérica (círculos) tomando  $\Delta t=0,125$ . En los instantes iniciales la solución numérica representa de forma fidedigna la solución exacta. A medida que el tiempo avanza, el error cometido numéricamente va aumentando. Si disminuimos  $\Delta t$  podemos controlar este error. Los matemáticos han ideado métodos numéricos más sofisticados que el que mostramos aquí. Estos permiten resolver de forma eficiente y precisa una enorme variedad de ecuaciones diferenciales.



Solución a la ecuación diferencial  $dy/dt = y$ . La línea continua representa la solución exacta. Los círculos, una solución numérica.

día, también permite deducir la longitud del lugar de observación. Y el Bureau des Longitudes fue creando con la expresa misión de elaborar tablas lo suficientemente precisas como para permitir a los marinos franceses calcular su posición a partir de la observación de la posición de los astros en el cielo. Desde entonces la oficina ha asumido otras tareas relacionadas, como son la organización de expediciones científicas y la participación en las conferencias internacionales que establecen los patrones de tiempo.

Un astrónomo del Bureau des Longitudes, Jacques Laskar, emprendió en los años noventa del siglo pasado la formidable tarea de calcular las efemérides astronómicas «para siempre». Laskar no pretendía, evidentemente, proporcionar tablas de navegación para los marineros del siglo cinco mil. Su trabajo estaba en realidad en la estela de los de Lagrange, Laplace y Poincaré: responder de una vez por todas al tema que tanto preocupaba a los quíntas.

Lo primero que a uno se le ocurre si quiere calcular las trayectorias de todos los planetas del sistema solar con ayuda de un ordenador es poner en la ecuación de cada planeta la fuerza de gravedad que, según la ley de Newton, ejercen el Sol y los demás planetas sobre él. Es decir, meter todas las ecuaciones sin aproximaciones y sin simplificaciones. Un grupo de científicos del Jet Propulsion Laboratory, en Estados Unidos, hicieron eso en la década de 1980 y «solo» pudieron calcular el futuro del sistema para los próximos 44 siglos. Laskar quería más y, siguiendo los métodos de aproximación ideados por sus ilustres predecesores (Laplace, Poincaré y De Verrier, entre otros), perfeccionó un modelo que tomaba en cuenta los ocho planetas principales incluyendo los efectos conocidos más importantes y despreciando términos irrelevantes. Las ecuaciones aproximadas de Laskar contenían 150 000 términos polinomiales y ocupaban cerca de 1 000 folios! Eso le permitió ir mucho más allá que sus colegas estadounidenses y pudo calcular con fiabilidad las trayectorias de los planetas hasta dentro de 200 millones de años. Con estas ecuaciones Laskar demostró que el sistema solar es caótico. ¿Qué queremos decir cuando decimos *caótico*? Que las trayectorias, en esas escalas de tiempo, se muestran irregulares, como si fueran aleatorias. En particular, si calculamos las trayectorias de un mismo planeta, por

ejemplo la Tierra, partiendo de dos posiciones muy similares, al cabo de 100 millones de años las trayectorias serán completamente diferentes. En estas circunstancias no tiene sentido calcular las efemérides más allá de los 100 millones de años, porque esta sensibilidad a las condiciones iniciales las hace inexactas. Pero eso no significa que no podamos sacar conclusiones. Lo que los físicos y matemáticos hacen en estos casos es calcular todo un conjunto de trayectorias partiendo de condiciones iniciales diferentes.

Para calcular la trayectoria de un planeta que se mueve en el espacio tridimensional necesitamos dar seis números inicialmente: tres para especificar su posición en el espacio y otros tres para su velocidad. Estos conjuntos de números forman un espacio abstracto que en física matemática recibe el nombre de *espacio de las fases*. El espacio de las fases tiene dimensión 2 para un movimiento en una línea, dimensión 4 para un movimiento en el plano y dimensión 6 para un movimiento en el espacio.

Para ilustrar el concepto consideremos un cuerpo que esté restringido a moverse sobre una línea, por ejemplo un *skater* que se tira por una pista estrecha de *skateboard*. En este caso, basta conocer su posición y su velocidad inicial para saber cuánto tardará en recorrer la pista. En el espacio de las fases el movimiento del *skater* queda especificado si representamos la velocidad,  $v$ , en cada instante en función de la posición,  $x$ , como vemos en la figura 5. El movimiento de vaivén queda reflejado en el espacio de las fases en una curva en forma de elipse: la velocidad es máxima cuando el patinador pasa por el centro de la pista ( $x=0$ ), su punto más bajo, y cero cuando llega a uno de los extremos ( $x$  máximo o mínimo), donde la altura es máxima. Si el *skater* consigue más altura en su ejercicio, la elipse correspondiente tiene una amplitud mayor. Si el movimiento se produce en una pista muy ancha, de forma que el patinador pueda desplazarse por su superficie, necesitaremos dos números para especificar su posición inicial y dos números para especificar su velocidad. El espacio de las fases tiene ahora dimensión 4. Y si la pista tiene rampas y montículos que permitan al *skater* saltar y hacer acrobacias en el aire, necesitaremos dos números más para especificar su altura y su velocidad vertical. El espacio de las fases tiene

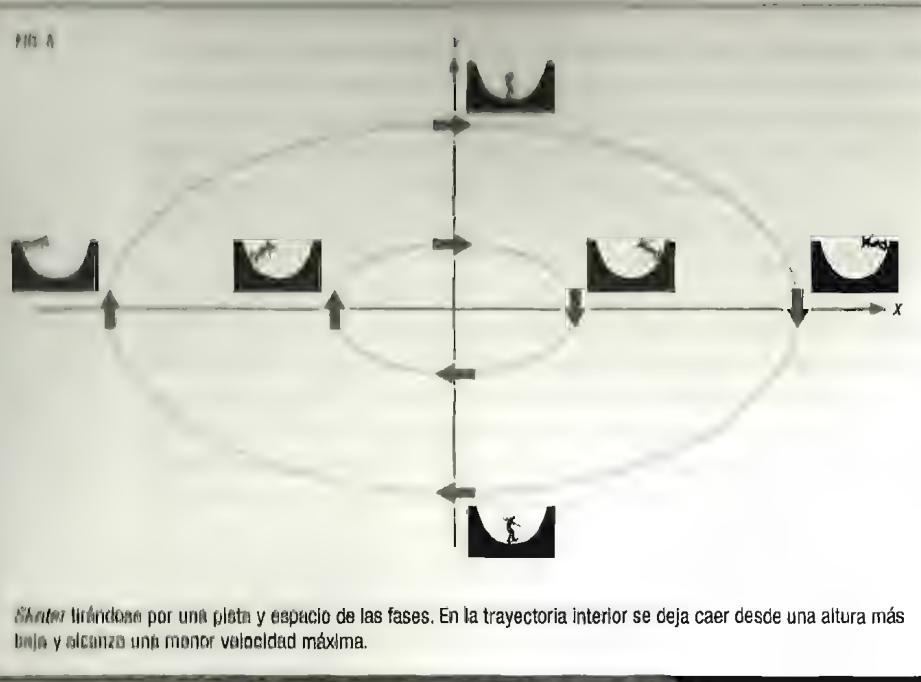


FIG. 8 Sección Poincaré por un plato y espacio de las fases. En la trayectoria interior se deja caer desde una altura más baja y alcanza una menor velocidad máxima.

entonces seis dimensiones, como el espacio de las fases de cualquier partícula que se mueva en el espacio al que nos referíamos en el párrafo anterior.

Si en lugar de un cuerpo tenemos  $N$  cuerpos, el espacio de las fases tiene dimensión  $6N$ , para un movimiento tridimensional. El espacio de las fases del sistema solar tiene, por tanto, una dimensión muy grande, y para realizar una integración de sus ecuaciones, esto es, para resolverlas, hay que dar un número de valores iniciales igual a seis veces el número de planetas y satélites que incluyamos en el cálculo.

Lo que hizo Laskar fue explorar el espacio de las fases; es decir, estudiar qué zonas del espacio de las fases eran accesibles desde los valores actuales de las posiciones y velocidades de los planetas o valores cercanos a ellos. La conclusión a la que llegó fue que los planetas interiores (Mercurio, Venus, la Tierra y Marte) están sometidos a variaciones erráticas de sus elementos

orbitales. Por ejemplo, la excentricidad de Marte, que refleja lo alargada que es la órbita que describe, varía caóticamente entre 0, órbita circular, y 0,1 (un valor cercano al actual). La excentricidad de la Tierra varía entre 0 y 0,06 (el valor actual es 0,017). La causa principal de estas variaciones erráticas son las resonancias entre los movimientos orbitales de la Tierra y Marte. La parte exterior del sistema solar, de Júpiter hacia fuera, tiene una dinámica menos caótica.

Como todos hemos experimentado, la capacidad de cálculo de los ordenadores avanza sin cesar y hoy en día es posible llevar los cálculos mucho más lejos que en la década de 1990. Recientemente, Laskar y sus colegas del Bureau des Longitudes han utilizado supercomputadoras para calcular la evolución del sistema solar, sin aproximaciones, hasta dentro de 5 000 millones de años. Más allá de este intervalo no tiene sentido hacer cálculos, puesto que ese es el tiempo de actividad que se espera para nuestro Sol. A partir de entonces será la evolución del Sol como estrella la que marque el destino de todos sus planetas.

Estos cálculos han confirmado todo lo dicho anteriormente y muestran, además, las siguientes conclusiones:

- La mayoría de las órbitas accesibles desde la situación actual no prevén colisiones entre planetas. En el 1% de los casos la órbita de Mercurio podría deformarse lo suficiente como para que el planeta fuera engullido por el Sol o chocara con Venus. En un escenario muy improbable, la excentricidad de Marte podría incrementarse lo suficiente como para pasar cerca de la Tierra o incluso colisionar con ella. Esto desestabilizaría las órbitas de los planetas terrestres y podría provocar una colisión entre la Tierra y Venus.
- Es posible, por fin, responder a la pregunta que Newton se hacía hace más de 300 años: ¿pueden las órbitas planetarias desestabilizarse lo suficiente como para que dos planetas choquen entre sí o alguno sea eyectado del sistema? La respuesta es que, con un horizonte de 5 000 millones de años, estos sucesos catastróficos tienen una probabilidad del 1%.

Un poco hay que preocuparse demasiado por estas conclusiones: los próximos miles de años se auguran bastante tranquilos.

## ¿SE PUEDE PREDICIR EL TIEMPO ATMOSFÉRICO?

En torno a 1911 Lewis Fry Richardson comenzó a barruntar la idea de predecir el tiempo no de la manera en que se había realizado hasta entonces, sino calculándolo. En su época, y durante muchas décadas más tarde, la predicción del tiempo atmosférico se basaba en algunos conceptos generales y en la experiencia del meteorólogo. Los meteorólogos recopilaban datos de las distintas estaciones meteorológicas y dibujaban con ellos, manualmente, los correspondientes mapas de presión, vientos, temperaturas y cualquier otra variable que consideraran de interés. A partir de estos mapas trataban de inferir cómo evolucionaría la atmósfera, o buscaban situaciones similares en el pasado y hacían su predicción basándose en lo que había ocurrido otras veces.

Para Richardson esta situación era poco satisfactoria. Ponía como ejemplo lo que ocurre en astronomía: los astrónomos calculan las efemérides, las predicen a partir del conocimiento detallado de las órbitas de los planetas y su movimiento. En sus propias palabras, escritas en el prólogo de su obra *Predicción del tiempo mediante procesos numéricos*:

Pero el almanaque náutico, esa maravilla de predicción precisa, no se basa en el principio de que la historia de la astronomía se repite una y otra vez. Se puede asegurar con bastante certeza que una particular disposición de estrellas, planetas y satélites nunca se repite dos veces. ¿Por qué íbamos a esperar entonces que el mapa meteorológico de hoy estuviera exactamente recogido en un catálogo de mapas anteriores?

En contraposición al método habitual, Richardson proponía «calcular» el tiempo atmosférico: resolver las ecuaciones físicas

que determinan la evolución de la velocidad del viento, la presión o la temperatura. Pero estas ecuaciones son enormemente complejas. Por ejemplo, la temperatura del aire en un punto y un instante dados depende de la temperatura en un instante anterior y de la temperatura en los puntos circundantes. También depende de la densidad del aire y de su velocidad en los puntos de alrededor. Todo ello se convierte en un conjunto de ecuaciones diferenciales que hay que resolver.

Para aplicar su técnica de cálculo, Richardson reemplazó las distribuciones continuas en el espacio y el tiempo por una red discreta. Dividió la parte de Europa que su modelo describía en una malla de 25 cuadrados, cada uno de ellos de 200 km de lado. Verticalmente dividió la atmósfera en cinco capas. En total, tenía, por tanto, 125 celdas tridimensionales. Dentro de cada una de esas celdas, las variables se suponía que tomaban un valor uniforme. Por ejemplo, se consideraba que la temperatura era la misma en todos los puntos de una celda dada.

Richardson también tenía que discretizar el tiempo y para ello consideró intervalos de seis horas. En sus ecuaciones reemplazaba las derivadas temporales de las variables atmosféricas por simples diferencias. Por ejemplo, la cantidad  $dT/dt$ , la derivada de la temperatura con respecto al tiempo, era reemplazada por la siguiente expresión:

$$\frac{(T_{t+\Delta t} - T_t)}{\Delta t},$$

donde  $T_{t+\Delta t}$  es la temperatura en el instante que se quiere calcular,  $T_t$  es la temperatura conocida en el instante  $t$  y  $\Delta t$  es el intervalo de tiempo que transcurre entre la situación conocida y la que se quiere calcular.

Tal vez algún día en el borroso futuro sea posible hacer los cálculos más rápido que el avance del tiempo atmosférico y a un coste menor que lo que se ahorre la humanidad debido a la información conseguida. Pero eso es un sueño.

LEWIS RICHARDSON, 1922

Partiendo de los datos observados en una parte de Europa el 20 de mayo de 1910, Richardson pretendía calcular la presión y la velocidad del viento seis horas más tarde en un punto escogido del centro de Europa. Evidentemente, no se trataba de predecir el tiempo ese día, porque, entre otras cosas, ese día ya había pasado, sino de poner de manifiesto que el tiempo atmosférico era «calculable». Richardson empezó a trabajar en serio en su proyecto en 1913, en el Observatorio Eskdalemuir, en Escocia.

Richardson pertenecía a la comunidad cuáquera, una secta cristiana que rechaza la guerra, y cuando estalló la Primera Guerra Mundial se declaró objeta de conciencia, por lo que no ingresó en el ejército. En cambio, se alistó voluntario como conductor de ambulancias y fue destinado a Francia. Fue en los años 1916 y 1917 cuando Richardson formuló el problema de forma completa. Aprovechaba para ello el tiempo muerto que transcurría entre servicio y servicio de su ambulancia. Según sus propias palabras: «Mi oficina era un montón de paja en un frío barracón militar». Con todos los datos disponibles y todas las ecuaciones preparadas, en seis semanas pudo hacer el cálculo completo para el punto que había escogido como ejemplo. Un papel, un lápiz, unas plantillas hechas por él mismo y unas tablas de logaritmos eran todo su equipo.

Cuando Richardson terminó sus cuentas el resultado fue un rotundo fracaso. El valor que obtuvo para la presión estaba muy alejado del que se había observado aquel día. La diferencia no era atribuible a un error en sus cálculos, sino que tenía una razón más profunda y que desvelaremos a lo largo de este libro a su debido tiempo. Baste decir por ahora que la dificultad tiene que ver con los valores iniciales utilizados, algo que el propio Richardson ya intuyó.

Richardson recogió todos los detalles de su aventura aritmética en la obra mencionada. Aunque no se había visto culminada con éxito, su experiencia arrojaba interesantes lecciones para el futuro. Él, en cualquier caso, se mostraba optimista. Según sus cuentas, 64 000 personas operando simultáneamente podrían calcular el tiempo atmosférico de todo el planeta lo suficientemente rápido como para predecir los acontecimientos atmosféricos

antes de que tuvieran lugar. Richardson soñaba con una inmensa malla llena de personas calculando y renitiendo sus informes a cuatro oficinistas jefes, los cuales distribuirían por telégrafo el tiempo predicho a los observatorios de todo el mundo.

## La era de los ordenadores

Lo que Richardson no podía imaginar era que las 64 000 personas que él presuponía necesarias no iban a hacer falta: un ingenio automático, el ordenador, haría los cálculos por ellas. Al terminar la Segunda Guerra Mundial, el matemático John von Neumann, miembro permanente del Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, en Estados Unidos, se interesó por el cálculo automático. Von Neumann dirigió el equipo que realizó la primera resolución numérica por ordenador de las ecuaciones del tiempo atmosférico. Von Neumann y Jule Charney utilizaron para ello el primer computador electrónico de propósito general de la historia, el ENIAC (*Electronic Numerical Integrator and Computer*). El ENIAC había sido desarrollado por científicos de la Universidad de Pensilvania a finales de la Segunda Guerra Mundial y fue financiado por el ejército de Estados Unidos con la intención de utilizarlo en los cálculos de artillería. Von Neumann trabajaba entonces en Los Álamos en el Proyecto Manhattan, el proyecto de diseño y construcción de la primera bomba atómica. Von Neumann supo de la construcción del computador y colaboró activamente con sus creadores. De hecho, los primeros cálculos que se realizaron en el ENIAC tuvieron que ver con el Proyecto Manhattan y fueron propuestos por él.

Von Neumann y sus colaboradores publicaron sus primeros resultados sobre la predicción del tiempo atmosférico en 1950. Dividían Estados Unidos en una malla cuadrada de  $15 \times 18$  y el lado de cada una de las celdas resultantes tenía 736 km. En estas condiciones no cabía esperar una predicción detallada. Además, con esta discretización, el ENIAC tardaba unas 24 horas en calcular la evolución de la atmósfera a 24 horas vista, por lo que no hubiera servido como predictor. Pero los científicos esperaban

## EL CENTRO EUROPEO PARA LA PREDICCIÓN METEOROLÓGICA A MEDIO PLAZO

El predicción del tiempo a medio plazo es la actividad más importante en el centro europeo para la predicción meteorológica a medio plazo en el Reino Unido. Aquí se analizará el trabajo que se realiza en el centro europeo para la predicción meteorológica a medio plazo en el Reino Unido.

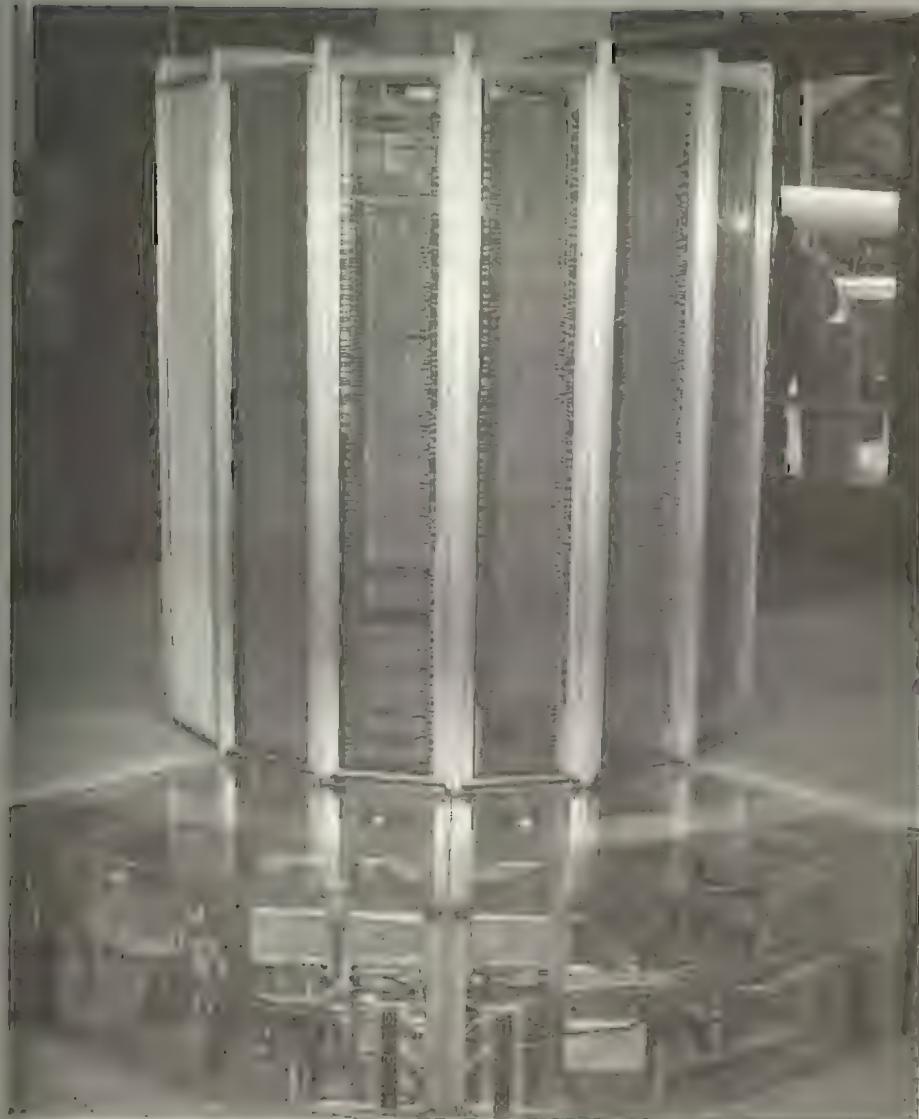
El trabajo consiste en el desarrollo de un modelo numérico para predecir el tiempo a medio plazo. Esto implica la realización de observaciones de presión, temperatura, humedad y velocidad del viento, que un solo país no puede realizar por su propia cuenta, y la disposición de una red de observación que proporcione los datos más actualizados de la atmósfera en todo el mundo. Un segundo lugar, se equipa a los países participantes con ordenadores y personal cualificado para programarlos y mantenerlos. Tercer aspecto es la formación de los organismos y centros internacionales dedicados a la predicción del tiempo. El más importante de estos centros es el *European Centre for Medium-Range Weather Forecasts* (ECMWF), situado en Reading (Reino Unido). Se trata de un centro compuesto en el que participa la mayoría de los países europeos.

### Predicciones meteorológicas

El trabajo principal del ECMWF es mejorar las predicciones meteorológicas fiables. Para ello elige uno de los modelos numéricos de la atmósfera. El modelo incorpora no solo la fuerza de la gravedad, proporcionalidad de la atmósfera, sino otros aspectos relevantes, como la forma de la tierra, los vientos, los detalles orientados más importantes y las características esenciales de la atmósfera terrestre. El modelo actual todo el globo está dividido en una malla cuyas celdas tienen 10 km de lado, cifra que podemos comparar con los 736 km que tenía el modelo de von Neumann y Orlitzky, y en el que ellos solo consideraban Estados Unidos. Además, la atmósfera se divide en 172 niveles verticales. Todo ello da lugar a un gigantesco sistema con, alrededor de 100 mil de ecuaciones que hay que resolver simultáneamente. Para realizar los cálculos se emplea la fuerza de dos superordenadores CRAY XC30, cada uno de ellos con una velocidad de cálculo en el rango de los petaflops (un petaflop equivale a  $10^{15}$ , esto es, 1000 billones de operaciones por segundo), que podemos comparar con las 60 operaciones por segundo del ordenador que utilizó Lorenz en sus primeros trabajos. Los dos supercomputadores están en utilización, diferentes y son alimentados de manera independiente con las observaciones de la red de protección frente a fallos eléctricos y de otro tipo. De esta forma se garantiza el servicio ininterrumpido. El ECMWF proporciona cada 12 horas predicciones para todo el planeta en 10 días vista. También proporciona predicciones, con menor resolución, a 100 días de tiempo mayores.

### Otras actividades

El ECMWF realiza además otro tipo de actividades relacionadas con el clima. Entre ellas destaca la actividad de monitorización continua de la atmósfera, integrado en el programa europeo Copernicus. Se trata de un control continuo y permanente de diferentes variables atmosféricas, como la concentración de gases de efecto invernadero, el nivel de radiación ultravioleta o la concentración de contaminantes. El objetivo final es proporcionar información meteorológica y climática que ayude a prever o paliar posibles catástrofes o situaciones adversas.



que un nuevo computador, que ya estaba en construcción en el mismísimo Instituto de Estudios Avanzados con una arquitectura interna diseñada por Von Neumann, pudiera realizar los cálculos en menos de media hora y con una malla más tupida. Los resultados obtenidos no predecían el tiempo correctamente, pero si algunas características generales observadas. El sueño de Richardson estaba más cerca.

### Edward Lorenz y una atmósfera de Juguete

Y aquí entra en escena el meteorólogo estadounidense Edward Lorenz. Lorenz había servido como meteorólogo de campo del ejército del aire y, al terminar la guerra, se incorporó al Departamento de Meteorología del Instituto Tecnológico de Massachusetts, el afamado MIT. Lorenz adquirió allí una sólida formación en meteorología dinámica, la que trata de entender la dinámica atmosférica a partir de las ecuaciones que rigen los procesos atmosféricos, y empezó a interesarse por la predicción numérica tal como la realizaban Charney y Von Neumann.

En esos primeros años de los ordenadores, algunos meteorólogos se habían inclinado por utilizarlos con un enfoque estadístico, más parecido a la predicción sinóptica habitual: situaciones semejantes darán lugar a comportamientos semejantes. Los estadísticos utilizaban los ordenadores para manejar gran cantidad de datos y tratar de hacer pronósticos a partir del comportamiento pasado de la atmósfera. Era, digámoslo así, una suerte de extrapolación.

En torno a 1956 Lorenz ideó una forma de discernir si el enfoque estadístico y el dinámico podían ser equivalentes. Partiría de un sistema de ecuaciones simplificado, pero cuyas soluciones tuvieran suficiente variabilidad. Esta variabilidad era necesaria porque las soluciones estacionarias, periódicas o muy repetitivas son fácilmente predecibles. Y utilizaría un ordenador para resolver las ecuaciones y generar una solución numérica suficientemente larga, que permitiera valorar la capacidad de predicción a medio y largo plazo. Tratando la solución como si fuera

una colección de datos meteorológicos reales, Lorenz utilizaría procedimientos estadísticos estándar para predecir el comportamiento de la serie numérica, la secuencia de valores obtenidos. Si la predicción estadística se correspondía con la solución numérica verdadera, la validez del método estadístico quedaría establecida.

Por sugerencia de un colega, Lorenz propuso al departamento la adquisición de un ordenador para su proyecto. A mediados de la década de 1950 los ordenadores no eran, ni mucho menos, algo corriente. El ordenador que adquirió Lorenz era un Royal McBee LGP-30 con una memoria interna de unos 16 kilobytes y que realizaba unas 60 multiplicaciones por segundo. La primera tarea a la que tuvo que dedicarse Lorenz fue la de programar. Muchas veces se nos escapa la gran cantidad de horas de trabajo abnegado y rutinario que conlleva a menudo la investigación científica. En una época en que la programación informática estaba dando sus primeros pasos, pocas personas sabían programar un ordenador y la tarea era compleja e intrincada. Lorenz pasó largos meses aprendiendo a utilizar su ordenador antes de poder hacer ningún cálculo efectivo con él.

Inspirado por las ecuaciones reales de la atmósfera, Lorenz ideó un sistema de unas pocas ecuaciones, doce en la versión final, que constituyan una especie de atmósfera de juguete: había calentamiento solar, ciclones y anticiclones, vientos del este y del oeste, y poco más. Pero, de nuevo tras muchos ensayos fallidos y muchas horas de trabajo, consiguió un rango de parámetros en los que su atmósfera mostraba el comportamiento esperado. La gráfica de la figura 6 muestra una recreación de cómo evolucionaba una de las variables de la atmósfera de Lorenz durante cinco «meses». El comportamiento no es completamente periódico, pero tampoco completamente aleatorio.

El ordenador arrojaba sus datos por medio de una impresora, todavía estaba lejos la invención de los terminales gráficos. Lorenz y sus colegas de departamento se agrupaban a veces en torno a la impresora para ver salir los resultados. Incluso hacían pequeñas apuestas sobre el comportamiento de la siguiente ristra de números, igual que hacen a veces los meteorólogos

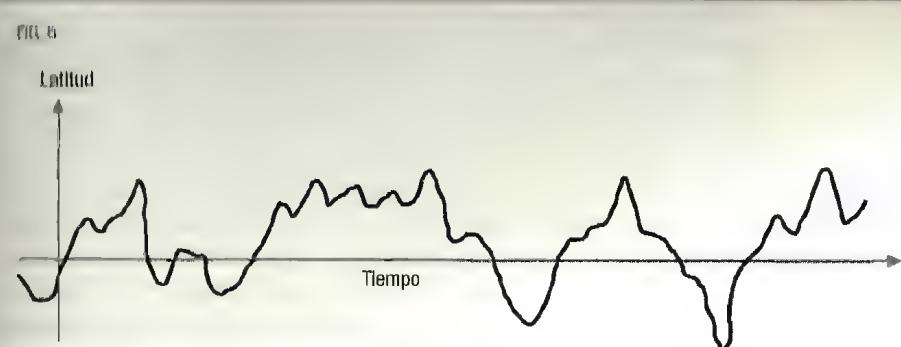
con el tiempo del día siguiente. Pronto se percataron de algunos comportamientos peculiares, de patrones que se reproducían con más frecuencia que otros. En cierto modo jugaban a ser meteorólogos de aquella «atmósfera numérica». Lorenz pudo comprobar en su atmósfera imaginaria que los procedimientos estadísticos habituales eran incapaces de predecir lo que iba a ocurrir. El comportamiento de su atmósfera mimetizaba el de la atmósfera real.

Un buen día Lorenz decidió repetir algunos cálculos, con el fin de examinar con detalle una de las variables. Detuvo el ordenador, tecleó una línea de números que había salido por la impresora un rato antes y volvió a ponerlo en marcha. Se fue a tomar un café y volvió al cabo de una hora (debía de ser un café americano). Cuando regresó comprobó que el ordenador había simulado unos dos meses de tiempo meteorológico, pero los números que salían por la impresora no tenían nada que ver con los que había calculado antes.

Lo primero que le vino a la cabeza era que el ordenador se había estropeado. Pero antes de llamar a nadie repasó los números que habían estado saliendo por la impresora durante su ausencia. Enseguida se dio cuenta de que los nuevos valores repetían los anteriores al principio, pero pronto empezaban a diferir. Las diferencias aumentaban duplicándose cada cierto tiempo, hasta que las cifras, al final, diferían completamente. La gráfica de la figura 7 muestra lo que Lorenz observó.

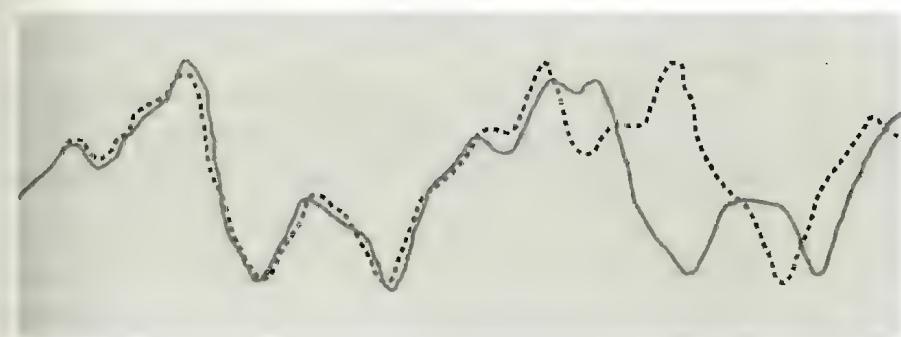
Lorenz comprendió lo que había ocurrido: los números que él había tecleado en la computadora no eran los originales exactos. Su máquina calculaba con seis cifras significativas, pero la impresora solo imprimía tres, para ahorrar espacio. Por lo tanto, los números introducidos diferían de los originales a partir de la cuarta cifra. Lorenz había descubierto la sensibilidad a las condiciones iniciales, el rasgo más característico del caos determinista.

Si una atmósfera tan simplificada ya mostraba este comportamiento, ¿qué cabría esperar de la atmósfera verdadera? Las magnitudes físicas en un observatorio meteorológico rara vez se miden con una precisión de tres cifras. Y la distribución de observatorios es irregular y obliga a hacer interpolaciones que,



Recreación de los resultados del modelo simplificado de atmósfera utilizado por Lorenz. La variable indica la latitud de los vientos de poniente más fuertes durante cinco «meses».

FIG. 7



Gráfica obtenida por Lorenz en su modelo simplificado de la atmósfera, en la que se aprecia la sensibilidad a las condiciones iniciales.

en algunos casos, tienen mucho margen de error. Por lo tanto, Lorenz había descubierto que la predicción meteorológica a largo plazo era una quimera.

En la actualidad los modelos numéricos son la herramienta básica con la que se realizan las predicciones meteorológicas. Estas son bastante fiables a dos o tres días vista, incluso a una semana, pero los modelos son incapaces de proporcionar un pronóstico aceptable con más de diez días de antelación.

El sistema solar y la atmósfera son ejemplos de sistemas caóticos. Sin embargo, mientras que podemos predecir con precisión la posición de los planetas con cientos de años de anticipación, somos totalmente incapaces de predecir el tiempo atmosférico con dos semanas de adelanto. Aun siendo ambos sistemas caóticos, lo son en escalas de tiempo totalmente distintas y sus respectivas formas de ser caótico tienen características diferentes. ¿De dónde viene el caos? ¿Podemos medir el caos? ¿Qué caracteriza a los sistemas caóticos? ¿Cuántas formas diferentes de caos existen? Trataremos de responder a estos interrogantes en los siguientes capítulos.

## ¿Qué es el caos?

En los años setenta y ochenta del siglo pasado fue surgiendo entre científicos de varias disciplinas la conciencia de que la aleatoriedad aparente que mostraban algunos fenómenos se podía explicar mediante leyes relativamente sencillas.

Entre los años 1950 y 2015, la población mundial pasó de 2 500 millones a 7 370 millones de personas. Dicha evolución se recoge en la gráfica de la figura 1. La línea continua trazada sobre la gráfica corresponde a un incremento exponencial de un 9% cada cinco años.

Esta evolución es el resultado de que la población, cada cinco años, se multiplica por un factor constante, lo que se refleja en la siguiente ley matemática:

$$x_{n+1} = \alpha x_n,$$

donde  $x_n$  es la población en un determinado año,  $x_{n+1}$  es la población cinco años más tarde y  $\alpha$  es una constante, que viene determinada por la tasa de crecimiento. En este caso,  $\alpha$  vale aproximadamente 1,09. Si la población en 1960 era de 3 000 millones de habitantes, en 1965 se acercaba a  $1,09 \cdot 3\,000 = 3\,270$  millones.

Al multiplicarse por un factor constante cada vez, los valores de la población cada cinco años siguen una progresión

geométrica y se disiparán de forma exponencial. Este crecimiento exponencial de la población humana fue predicho por el pensador inglés Thomas Malthus en 1798. Malthus auguraba que la población, en ausencia de obstáculos, crecía según una progresión geométrica, de la forma  $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \dots$  mientras que los recursos aumentarían en progresión aritmética, a la manera de la sucesión  $1, 2, 3, 4, \dots$ . Como la progresión geométrica crece mucho más deprisa que la aritmética, era solo cuestión de tiempo que la población humana empezara a toparse con dificultades si no se tomaban medidas para controlar el crecimiento.

En ausencia de factores limitantes, Malthus predecía que la población se doblaría cada 25 años. En la gráfica de la figura 1 vemos que eso no ocurre en la actualidad (se necesitan cerca de 40 años para duplicar la población mundial), pero lo que sí es cierto, en el intervalo analizado en esta gráfica, es que el aumento de la población sigue una progresión geométrica, con un incremento casi constante del 9% cada cinco años. Es decir, se cumple la ley de Malthus pero el coeficiente  $\alpha$  es más pequeño de lo que él calculó.

La ley de Malthus es un caso particular de lo que en matemáticas se conoce como un *sistema dinámico discreto*. En general, un sistema dinámico es cualquier sistema cuyo estado cambia en el tiempo. La palabra *sistema* la debemos entender aquí en un sentido completamente general: puede tratarse de un conjunto de cuerpos celestes, el cuerpo humano, un ecosistema, la cotización de las acciones en la bolsa, etcétera. Para estudiar la evolución de un sistema dinámico se precisa una ley que nos diga cómo cambia con el tiempo. El sistema es discreto si esta ley proporciona el estado del sistema en intervalos fijos de tiempo, por ejemplo, el valor de las acciones cada día, o el de una población cada generación o cada cierto número de años, como en la figura 1. Si la ley proporciona el estado del sistema de instante en instante, para cualquier tiempo, se dice que el sistema es continuo.

Un sistema dinámico discreto viene definido por una variable  $x$ , que representa el estado del sistema (el número de individuos

FIG. 1

EVOLUCIÓN DE LA POBLACIÓN MUNDIAL

Miles de millones de habitantes

9

8

7

6

5

4

3

2

1

0

1940

1950

1960

1970

1980

1990

2000

2010

2020

Año

Evolución de la población humana del planeta entre 1950 y 2015. El aumento sigue una progresión geométrica, con un incremento del 9% cada cinco años.

de la población mundial cada cinco años, en el ejemplo anterior), y una ecuación que dice cómo evoluciona el sistema:

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

La ley de evolución viene representada por  $f(x)$ , una función matemática. Lo que expresa la ecuación anterior es que en cada iteración obtenemos el nuevo valor de  $x$  a partir del valor anterior. Para un valor inicial  $x_0$ , la aplicación de  $f(x)$  (primera iteración) produce  $x_1 = f(x_0)$ . Una segunda aplicación, esta vez a  $x_1$ , produce  $x_2 = f(x_1)$  (segunda iteración); haciéndolo una vez más obtenemos  $x_3 = f(x_2)$ . De esta forma, la aplicación reiterada de  $f(x)$  produce una sucesión de valores  $x_0, x_1, x_2, \dots$  a partir de un valor inicial  $x_0$  dado. Por ejemplo, podemos construir un

sistema dinámico sencillo duplicando a cada paso el valor de  $x$ . La función sería entonces  $f(x) = 2x$ , y un valor inicial de la variable  $x_0 = 2$  produciría la sucesión de valores  $2, 4, 8, 16, 32, \dots$ . Dando valores iniciales diferentes obtendríamos sucesiones diferentes, cada una correspondiente a una evolución posible del sistema. La figura 2 representa la función  $f(x) = 2x$ , así como la evolución a la que da lugar su aplicación reiterada a partir del valor inicial 2.

En la teoría de Malthus  $f(x)$  es una función lineal:  $f(x) = \alpha x$ , y su representación en una gráfica es una línea recta similar a la de la figura 2, aunque menos inclinada, porque el factor de crecimiento es menor que 2. Una función lineal tiene dos propiedades fundamentales:

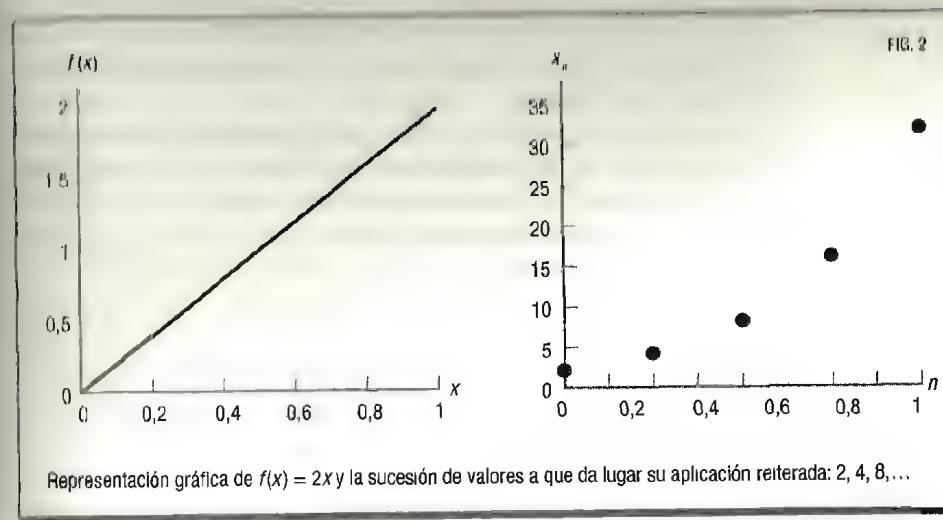
1. Si multiplicamos la variable por un valor determinado el resultado queda multiplicado por el mismo valor:

$$f(k \cdot x) = k \cdot f(x).$$

2. La suma de dos valores da como resultado la suma de aplicar la función por separado a cada uno de ellos:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2).$$

En lo que nos ocupa en este libro, un sistema lineal nunca puede producir caos. En particular, la evolución propuesta por Malthus solo da lugar a tres comportamientos perfectamente predecibles. Si el factor  $\alpha$  es mayor que 1, la población crece de manera exponencial, como en la figura 1, y a muy largo plazo se haría infinitamente grande. Si el factor  $\alpha$  es menor que 1, la población disminuye en cada iteración de manera continuada; a muy largo plazo la población tiende a cero. Por último, si el valor  $\alpha$  es igual a 1, la población no cambia. Un mundo lineal es un mundo perfectamente predecible, aburrido, cabría decir. Para que pasen cosas más interesantes, las leyes que rigen los procesos naturales deben ser no lineales.



## ROBERT MAY ESTUDIA LA DINÁMICA DE POBLACIONES

En 1976 un científico multidisciplinar, Robert May, estudió con detalle una modificación de la ley de Malthus que representaba un modelo más realista de la dinámica de poblaciones. May había estudiado Física en su Australia natal. Tras doctorarse en Física Teórica pasó un tiempo en Harvard como profesor de Matemática Aplicada, y en 1971 pasó un año en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton. Desde su fundación, el objetivo del instituto ha sido el de proporcionar a los científicos un ambiente relajado donde trabajar sin obligaciones, sin la presión de obtener resultados o completar proyectos en un plazo dado, una especie de «monasterio científico». En Princeton los científicos pueden embarcarse en proyectos que no lleven a ninguna parte, sin temor a ser expulsados. Allí May entabló relación con los biólogos de la universidad y empezó a interesarse por los problemas de la ecología teórica. May ofrece un claro ejemplo de hasta qué punto el caos determinista es un campo multidisciplinar. El sistema dinámico que él estudió ya había sido considerado por otros biólogos como modelo simplificado para la dinámica de

poblaciones. Pero, donde otros vieron irregularidades y comportamientos extraños de dudoso interés, él vio algo que merecía la pena estudiar en detalle.

Como el propio Malthus había comprendido, el crecimiento exponencial no podía mantenerse indefinidamente. La falta de recursos limitaría necesariamente el crecimiento. Para tomar en cuenta este hecho, el modelo estudiado por May consideraba que el coeficiente  $\alpha$  debía depender de la población,  $x$ , de modo que, a mayor población, menor tasa de crecimiento. May adoptó una forma en la que  $\alpha$ , la tasa de crecimiento, decrece cuando crece la población,  $x$ , de una manera sencilla:

$$\alpha = r \left(1 - \frac{x}{x_m}\right).$$

Es decir, si la población,  $x$ , es una fracción muy pequeña del valor constante  $x_m$ ,  $\alpha$  es esencialmente constante y su valor es muy próximo a  $r$ , que representa la tasa de crecimiento más alta posible. Por ejemplo, si  $x$  es una centésima parte de  $x_m$ , el número entre paréntesis vale 0,99 y  $\alpha = 0,99r$ . Pero a medida que crece la población, la tasa de crecimiento  $\alpha$  va disminuyendo. Si la población es la mitad del valor  $x_m$ , es decir,  $x = 0,5x_m$ , la tasa de crecimiento  $\alpha$  disminuye a la mitad:  $r/2$ . Por último, la tasa de crecimiento se hace cero para  $x = x_m$ . La constante  $x_m$  representa, pues, el máximo valor de población que el entorno puede admitir, ya que alcanzado este valor la población se extinguiría en el siguiente paso.

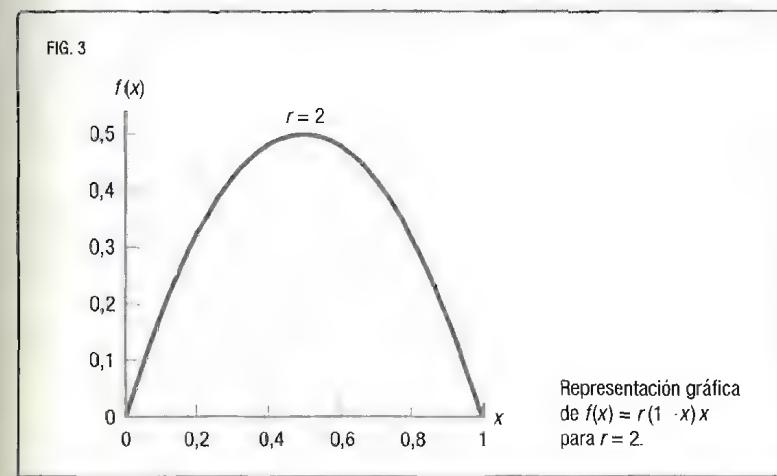
Para que la ecuación tenga un aspecto más manejable, vamos a redefinir la variable  $x$  de forma que represente no ya el número de individuos, sino la fracción entre el número de individuos existente y el total admisible,  $x_m$ . De esta forma, en adelante,  $x = 1$  representa una población con el número máximo de individuos,  $x_m$ ;  $x = 0,5$  representa una población con la mitad del valor  $x_m$ , etcétera. Con este criterio, la ley de May se escribe así:

$$x_{n+1} = r(1 - x_n)x_n.$$

Hay que entender esta ley como un modelo no solo de la población humana mundial, sino de cualquier especie en un ecosistema dado. Las diversas iteraciones corresponden a la población cada cierto intervalo fijo de tiempo, ya sean semanas, meses o años, pero también pueden referirse a sucesivas generaciones de individuos. Si la población es muy pequeña, se supone que hay suficiente alimento en el entorno y no hay depredadores específicos que se hayan desarrollado. La población crece entonces con una tasa constante, como predijo Malthus. Pero, si la población crece en exceso, empiezan a escasear los alimentos y proliferan los depredadores específicos, reduciendo el crecimiento. En caso de superpoblación, representada en la fórmula anterior por el valor  $x = 1$ , la población alcanza el valor máximo posible, se produce la catástrofe, y la especie desaparece en la siguiente iteración.

La función  $f(x) = r(1 - x)x$ , que define el sistema dinámico asociado, es ahora una función no lineal. Esta función tiene dos términos:  $f(x) = rx - rx^2$ . El primer término es como el de la ley de Malthus y es lineal; el segundo es el que introduce la no linealidad, ya que el cuadrado de la suma de dos números no es la suma de sus cuadrados y, por tanto,  $f(x_1 + x_2) \neq f(x_1) + f(x_2)$ .

Esta función está representada en la figura 3. La aplicación recibe el nombre de *aplicación logística*.



Muy descubrió que este sencillo modelo da lugar a comportamientos muy variados dependiendo de la tasa de crecimiento  $r$ . Vamos a explorarlos.

Si el valor de  $r$  es inferior a 1, la población disminuye en cada iteración y, al cabo del tiempo, la especie se extingue. Este comportamiento es el que vemos en la figura 4, en la que hemos representado la evolución de la población para  $r=0,5$ . En este caso la población se reduce más o menos a la mitad en cada paso. En diez iteraciones casi ha desaparecido.

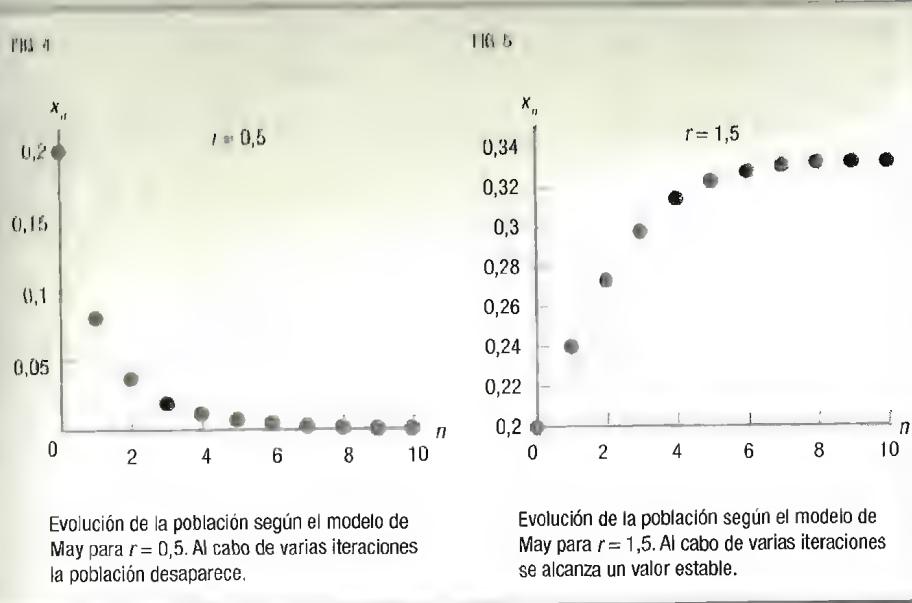
Si  $r$  es mayor que 1, la población comienza creciendo. Pero el término  $-x$  que hemos añadido en el paréntesis evita que la población crezca indefinidamente, como pasaba en el modelo de Malthus. Para valores de  $r$  entre 1 y 3, la población acaba por estabilizarse en un valor fijo. Esto lo vemos en la figura 5, donde hemos representado la evolución de la población para  $r=1,5$ . Con este parámetro la población se estabiliza para un valor de  $x$  próximo a 0,33 independientemente del valor inicial de  $x$  que hayamos utilizado.

Pero ahí no se agotan las posibilidades. Si seguimos aumentando  $r$ , aparecen comportamientos más variados. Por ejemplo, para  $r=3,2$  la población acaba por oscilar entre dos valores definidos. En la figura 6 hemos calculado la evolución del sistema para este valor empezando con  $x=0,1$ . Inicialmente la población crece y después de un par de iteraciones empieza a oscilar entre dos valores que al principio están bastante cercanos y luego se separan. Al final se alcanza un régimen de oscilación entre dos valores definidos, repitiéndose el mismo valor cada dos iteraciones.

Incrementando un poco más  $r$  se llega a una situación en la que la población pasa por un ciclo de cuatro valores diferentes, que van repitiéndose sucesivamente, tal y como vemos en la gráfica de la figura 7.

Las sucesivas transiciones a ciclos de repetición cada vez más altos se producen cada vez más pronto. Y a partir de  $r=3,57$  la dinámica se vuelve caótica.

El comportamiento observado parece indistinguible del conjunto de datos que arrojaría un proceso completamente aleato-



Evolución de la población según el modelo de May para  $r=0,5$ . Al cabo de varias iteraciones la población desaparece.

Evolución de la población según el modelo de May para  $r=1,5$ . Al cabo de varias iteraciones se alcanza un valor estable.

rio, como puede ser tirar un dado. Por ejemplo, los valores de la centésima iteración y siguientes son:  $x_{100}=0,766$ ;  $x_{101}=0,659$ ;  $x_{102}=0,827$ ;  $x_{103}=0,526$ ;  $x_{104}=0,917\dots$  Sin embargo, estos datos no se corresponden con los que obtendríamos en un proceso puramente aleatorio, en el que los valores obtenidos no están correlacionados unos con otros, no dependen unos de otros, sino que son totalmente independientes. Esto no ocurre con las series caóticas como la de la figura 8, porque los datos obedecen a una ley determinista y siempre hay una estructura subyacente. En este caso es fácil comprobarlo (figura 9): basta representar  $x_{n+1}$  frente a  $x_n$  para recuperar parte de la parábola de la figura 3.

¿Cómo podemos recopilar de forma compacta toda esta variedad de comportamientos? La forma habitual de hacerlo es representar en el eje de abscisas los valores de  $r$ , y en el eje de ordenadas los valores de  $x_n$  que se obtienen para un número suficientemente alto de  $n$ , de forma que se haya eliminado la evolución transitoria de las primeras iteraciones. Al hacerlo se obtiene el diagrama de

FIG. 6

Evolución de la población según el modelo de May para  $r = 0,2$ . Al cabo de cuatro iteraciones se plantea un régimen en el que la población oscila entre dos valores definidos.

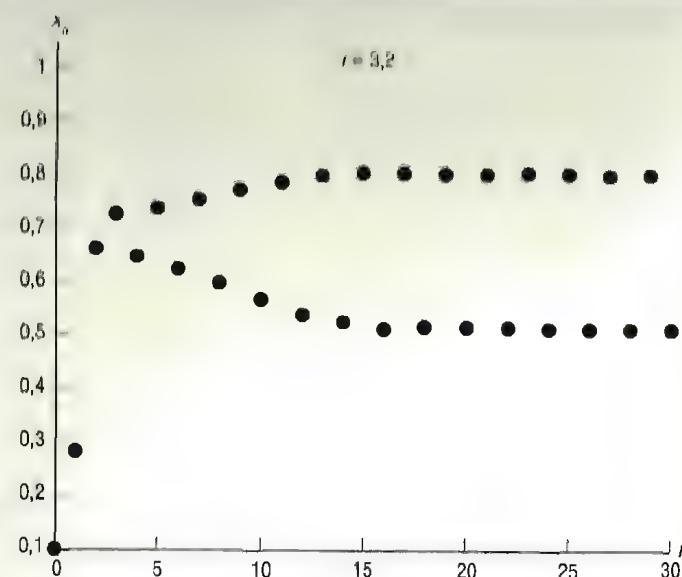


FIG. 7

Evolución de la población según el modelo de May para  $r = 3,5$ . Después de una breve etapa transitoria, la población oscila entre cuatro valores definidos.

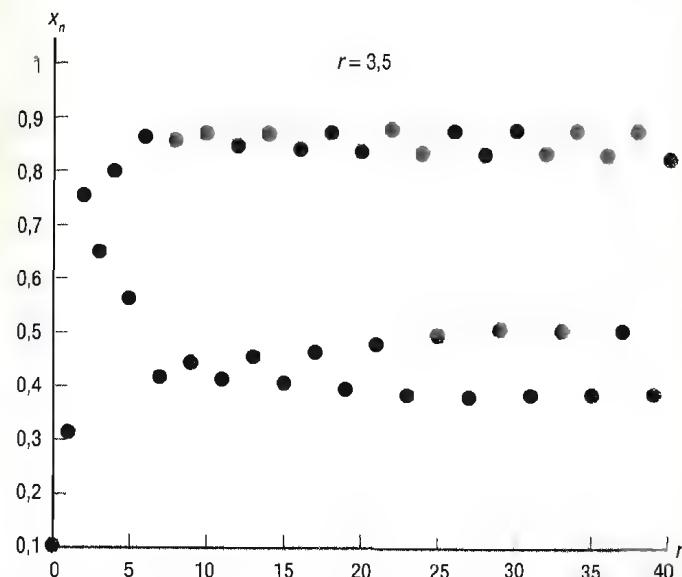


FIG. 8

Evolución de la población según el modelo de May para  $r = 3,678$ . La población varía erráticamente.

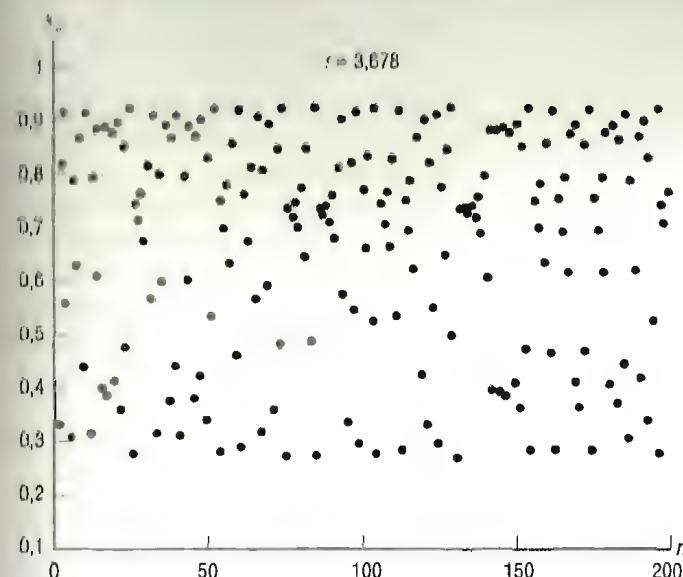
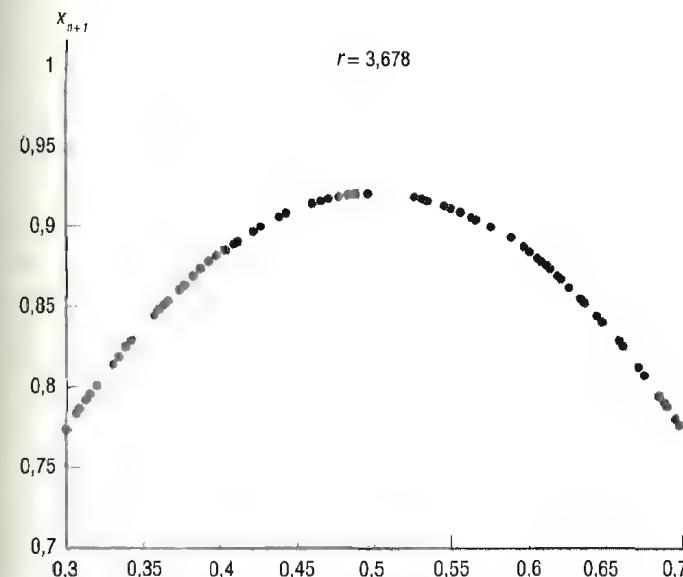


FIG. 9

Representación de  $x_{n+1}$  frente a  $x_n$  para los valores del modelo de May obtenidos con  $r = 3,678$ .



No solo en investigación, sino en el día a día, en política y economía, nos iría mejor a todos si más gente entendiera que sistemas no lineales simples no necesariamente presentan propiedades dinámicas simples.

ROBERT MAY

senta un punto de equilibrio del sistema dinámico y en este rango de valores es un punto estable del sistema. Entre  $r$  igual a 1 y  $r$  igual a 3, la población tiende a estabilizarse en torno a un valor distinto de cero. Este valor crece a medida que crece  $r$ . Si se aumenta  $r$  por encima de 3, la población ya no se estabiliza en un nivel concreto, sino que oscila entre dos valores. En  $r$  igual a 3,449 se produce un nuevo cambio y la población empieza a oscilar entre cuatro valores diferentes. Los puntos en los que se produce el cambio de comportamiento, esto es,  $r=1$ ,  $r=3$ ,  $r=3,449$ , etcétera, se conocen como *puntos de bifurcación*. Al aumentar  $r$ , las bifurcaciones se producen cada vez más pronto y el sistema va pasando por ciclos de 2, 4, 8, 16, ... valores. El número de puntos en el ciclo tiende a infinito para un valor concreto de  $r$ , cercano a 3,57. A partir de ese punto la dinámica se vuelve caótica.

Esta transición al caos a través de ciclos cuyos períodos se van doblando (2, 4, 8, ...) se conoce como *transición al caos por desdoblamiento de periodo* o *cascada subarmónica*. La aplicación logística es quizás el ejemplo matemático más simple que presenta este comportamiento. Pero este modo de transición al caos se ha encontrado, desde los estudios de May, en sistemas muy diversos, ya sean naturales o artificiales. En particular, se observó experimentalmente por primera vez en el movimiento de un fluido calentado desde abajo, como veremos más adelante.

En lo que se refiere a la dinámica de poblaciones, el modelo es muy simplificado, pero deja un mensaje radical: un comporta-

lo figura 10. Este diagrama, que May ya vislumbró, se conoce como *diagrama de Feigenbaum*, en honor de Mitchell Feigenbaum, matemático y físico estadounidense del que hablaremos más adelante.

La interpretación de este diagrama es la siguiente. Para valores de  $r$  entre 0 y 1, todas las posibles evoluciones de la población terminan en la extinción:  $x=0$ . Este valor representa un punto de equilibrio del sistema dinámico y en este rango de valores es un punto estable del sistema. Entre  $r$  igual a 1 y  $r$  igual a 3, la población tiende a estabilizarse en torno a un valor distinto de cero. Este valor crece a medida que crece  $r$ . Si se aumenta  $r$  por encima de 3, la población ya no se estabiliza en un nivel concreto, sino que oscila entre dos valores. En  $r$  igual a 3,449 se produce un nuevo cambio y la población empieza a oscilar entre cuatro valores diferentes. Los puntos en los que se produce el cambio de comportamiento, esto es,  $r=1$ ,  $r=3$ ,  $r=3,449$ , etcétera, se conocen como *puntos de bifurcación*. Al aumentar  $r$ , las bifurcaciones se producen cada vez más pronto y el sistema va pasando por ciclos de 2, 4, 8, 16, ... valores. El número de puntos en el ciclo tiende a infinito para un valor concreto de  $r$ , cercano a 3,57. A partir de ese punto la dinámica se vuelve caótica.

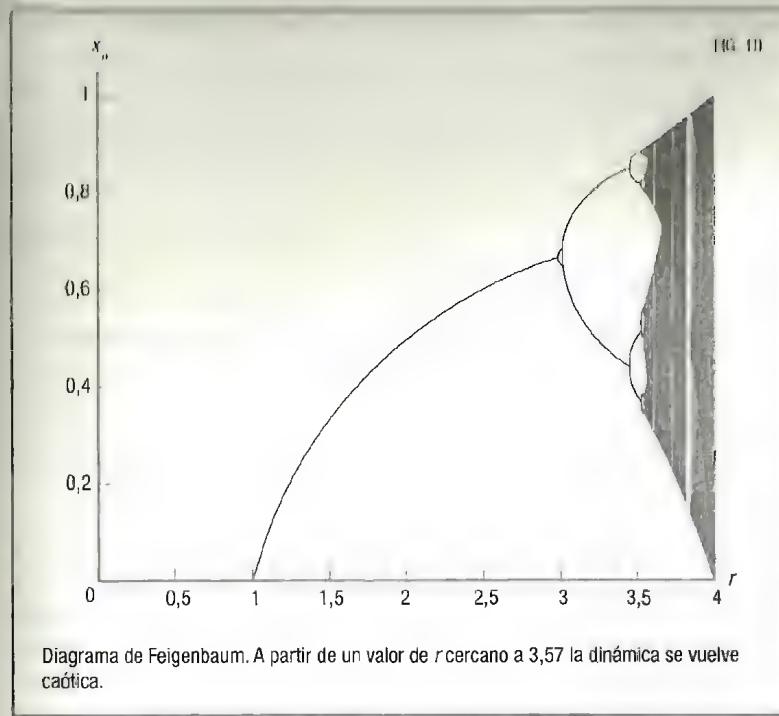


Diagrama de Feigenbaum. A partir de un valor de  $r$  cercano a 3,57 la dinámica se vuelve caótica.

miento complejo no se debe necesariamente a una multiplicidad de causas. Por ejemplo, para  $r=4$  la población varía de iteración en iteración barriendo todos los valores posibles, de 0 a 1. Puede darse el caso de que una iteración produzca un valor tan cercano a 0 que la población se extinga sin más. No hacen falta catástrofes, epidemias, invasiones externas o meteoritos: la propia dinámica interna puede llevar a la extinción.

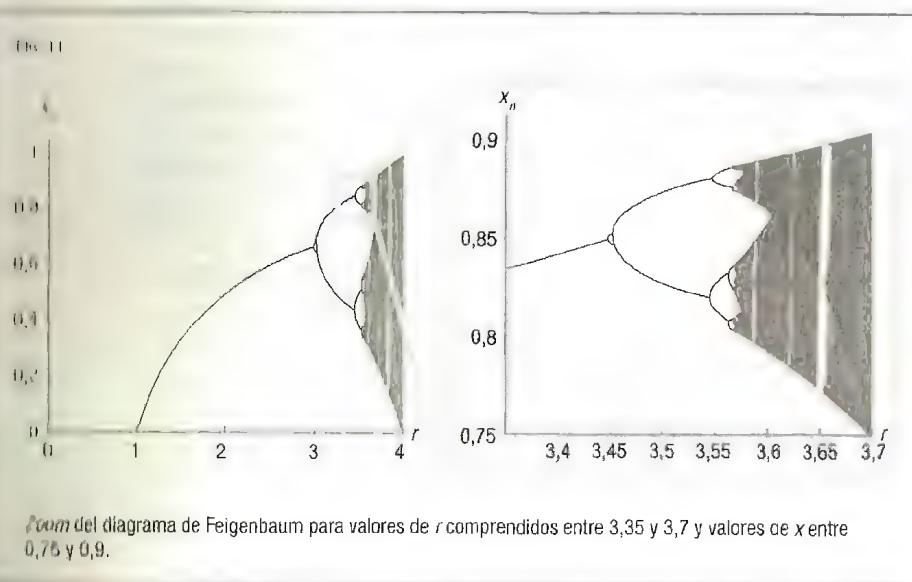
## Autosimilaridad

Ya hemos explicado que los sistemas caóticos deterministas se caracterizan por la sensibilidad a las condiciones iniciales, por la irregularidad en el comportamiento y por la no linealidad de las ecuaciones que los modelan. El diagrama de Feigen-

hacum nos ilustra una propiedad más de este tipo de sistemas: la *autosimilaridad*.

La figura 11 representa una ampliación de la zona alta del diagrama de la figura 10. La línea inicial no corresponde a un punto estable de la población, sino que se corresponde con los valores altos del ciclo que se produce tras la segunda bifurcación. Vemos que el aspecto de este diagrama es similar al del diagrama anterior. Si, a su vez, hiciéramos un *zoom* de este diagrama en torno a  $r=3,55$  obtendríamos otra vez una figura similar. Solo cambiarián en la gráfica las escalas de  $r$  y de  $x$ , cuyo rango de variación sería cada vez más estrecho. Esta característica de una figura o diagrama, que presenta la misma estructura a escalas cada vez más pequeñas, es lo que se conoce como *autosimilaridad*, y está presente de una u otra forma en todos los sistemas caóticos.

May escribió un artículo para la revista científica *Nature* en 1976 en el que resumía todos sus hallazgos, los más importantes de los cuales hemos descrito aquí. El artículo terminaba con una llamada a los responsables del sistema educativo para que toma-



ran conciencia de la importancia de la no linealidad en nuestro entorno. May proponía que el estudio de la aplicación logística, que se puede hacer con una calculadora de bolsillo, se incluyera en la asignatura de Matemáticas a una edad temprana, ya que no es más difícil que las derivadas o las integrales. Pasados casi 40 años, la propuesta de May no parece haber encontrado aún el eco que él hubiera deseado.

## EL CAOS EN UN POCO DE LÍQUIDO

Las primeras décadas del siglo xx son, en física, los años de la física atómica y nuclear. Los grandes teóricos y los mejores físicos experimentales pugnaban por desentrañar las leyes del átomo y establecer la naturaleza de la radiactividad. Pero no todo el mundo se dedicaba a estas disciplinas. Una rama, que había sido muy importante durante el desarrollo de la física y la tecnología en el siglo xix, siguió llamando la atención de algunos de los mejores: la física de los fluidos. Uno de ellos fue Henri Bénard, un físico francés cuyas habilidades experimentales le han hecho pasar a la historia por el descubrimiento de las celdas de convección en un líquido que se calienta desde abajo.

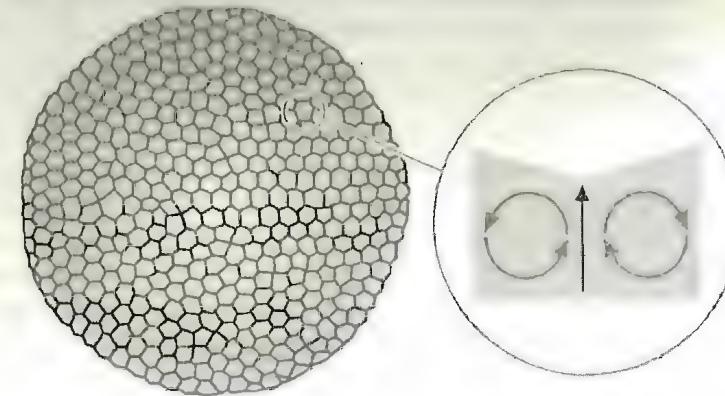
Henri Bénard nació en un pueblo de Normandía, en Francia, el 25 de octubre de 1874. En 1894 superó el examen de ingreso en la Escuela Normal Superior de París. La Escuela Normal era, y sigue siendo, uno de los centros de educación superior más prestigiosos de Francia, y fue fundada en la época de la Revolución. Una idea del nivel de exigencia de los exámenes de acceso y de la escuela la da el hecho de que Bénard fue uno de los 17 que superaron el examen de entre 307 candidatos llegados de toda Francia. Compañeros de promoción de Bénard en la Escuela Normal fueron dos de los más grandes científicos franceses del siglo xx: el físico Paul Langevin y el matemático Henri Lebesgue.

Al iniciar su tesis doctoral Bénard se interesó por un tema de moda: la recepción de ondas electromagnéticas. Investigando nuevos materiales para la detección de las ondas observó, por

causalidad, la formación de figuras poligonales en un baño de parafina fundida a la que se le había añadido polvo de grafito. Normalmente la densidad de un fluido disminuye con la temperatura: cuanto más caliente, menos denso. Eso hace que el aire caliente tienda a ascender, y lo mismo ocurre dentro de un líquido: si la temperatura no es uniforme las zonas más calientes, y por tanto menos densas, tienden a ascender, poniendo al líquido en movimiento. El líquido caliente transporta consigo el calor, transferencia que recibe el nombre de *convección*. En el experimento de Bénard las partículas de grafito habían servido de trazadores, revelando las estructuras convectivas que la parafina líquida formaba al moverse impulsada por el calor aportado para fundirla. Las partículas de grafito se movían con el líquido y su movimiento reflejaba el de aquél, de modo parecido al humo del tabaco cuando nos ayuda a ver los remolinos que se forman en el aire. Bénard comprendió que las estructuras formadas merecían ser objeto de investigación por sí mismas e inició su estudio sistemático.

En sus experimentos Bénard depositaba una fina capa de líquido sobre una placa metálica que calentaba por medio de vapor de agua. El éxito de las observaciones dependía de muchos factores, siendo los más importantes la constancia y la uniformidad de la temperatura en toda la placa. La más leve variación de temperatura o el más mínimo defecto de la placa arruinaban el experimento. El uso de vapor de agua como elemento calefactor llevó a Bénard a usar sustancias que son sólidas a temperatura ambiente y funden en torno a 50 grados. Entre ellas destacaba un aceite conocido como espermaceti, que almacenan en la cabeza algunos cetáceos. En esa época, en la que la industria ballenera estaba en su apogeo, el espermaceti se usaba para hacer velas y también como ungüento medicinal, por lo que era una sustancia relativamente fácil de conseguir. La figura 12 muestra lo que hoy en día se conocen como *celdas de Bénard*, uno de los patrones de convección que Bénard observó en una delgada capa de espermaceti. Al calentar el líquido por debajo, las zonas más cercanas a la placa están más calientes que las capas más superficiales. El líquido caliente tiende a ascender y el más frío,

FIG. 12



La imagen de la izquierda muestra las celdas de Bénard en espermaceti vistas desde arriba. El esquema de la derecha ilustra el movimiento de convección dentro de una de las celdas, girada y vista en sección vertical. El líquido asciende por el centro y baje por los bordes de cada celda.

a descender. Si el calentamiento es muy uniforme y la capa de líquido muy delgada, el flujo se produce de forma ordenada. En el patrón hexagonal de la figura, Bénard pudo determinar que el líquido ascendía por el centro de los hexágonos y descendía por los bordes.

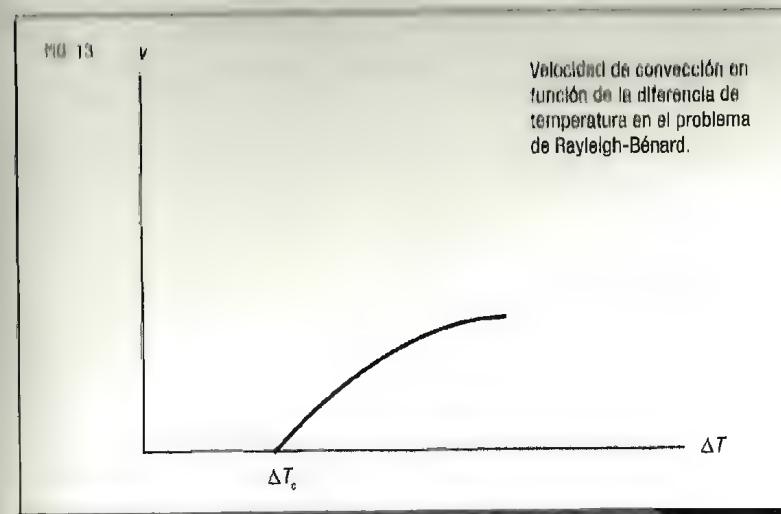
Que un sistema inanimado produjera semejante patrón hexagonal de manera espontánea podía parecer, a primera vista, sorprendente. Sin embargo, hay que tener en cuenta que sea cual sea el patrón debe llenar toda la superficie del líquido, y si no hay zonas diferenciadas, esto es, si la superficie es totalmente lisa, de espesor perfectamente constante y tiene temperatura uniforme, el problema se reduce al de llenar un plano con un patrón regular. Los matemáticos saben desde muy antiguo, ya lo sabían los artesanos andalusíes que decoraron las paredes de la Alhambra de Granada, que solo hay tres formas de llenar una superficie con un motivo poligonal regular: usando cuadrados, triángulos y hexágonos. Así que el patrón observado por Bénard era una de las escasas posibilidades.

Henri Bénard fue un extraordinario experimentador. Sus capas de espuma estaban apenas un milímetro de grosor y la placa sobre la que reposaban debía estar en posición perfectamente horizontal para que el espesor no fuera mayor en unas zonas que en otras. Para hacer visibles las celdas Bénard usó la reflexión producida en la superficie, deformada como un espejo cóncavo, en el centro de las celdas. Fue capaz, de esta forma, de medir diferencias de espesor del orden de una micra en capas de un milímetro que estaban a unos 100 °C de temperatura. Usando una técnica óptica que aprovechaba la luz reflejada en la superficie del líquido y en la pulida superficie metálica del fondo, consiguió medir diferencias de temperatura del orden de 0,1 °C en el interior de las celdas de convección.

Si el siglo xix vio nacer la fotografía, el cambio de siglo trajo el cinematógrafo. En la cultura moderna tanto la fotografía como el cine suelen estar asociados al arte y al espectáculo, pero esta concepción ignora la enorme importancia que el desarrollo de ambas técnicas ha tenido en la ciencia. Henri Bénard fue uno de los primeros científicos en utilizar el cinematógrafo como técnica experimental. Grabó sistemáticamente sus experimentos y ello le permitió observar el movimiento del líquido dentro de las estructuras convectivas.

Después de pasar unos años en Lyon y Burdeos, en 1922 Bénard fue nombrado profesor en la Facultad de Ciencias de la Sorbona, en París, ciudad en la que residió hasta su muerte en 1939. Dirigió numerosas tesis doctorales y formó a toda una generación de científicos franceses que dedicaron su carrera a la mecánica de fluidos, todos ellos distinguidos por una sólida formación experimental.

Los experimentos de Bénard llamaron la atención del físico inglés John William Strutt, lord Rayleigh, que en 1916 propuso una explicación teórica de las observaciones del francés. Desde entonces, el problema de un líquido que se calienta desde abajo es conocido como *problema de Rayleigh-Bénard*. Si representamos la velocidad máxima de movimiento del líquido en función de la diferencia de temperatura entre el fondo y la superficie, obtenemos un diagrama parecido al de la figura 13.



Por debajo de la diferencia de temperatura crítica  $\Delta T_c$  el líquido está en reposo y la velocidad es cero. A partir de  $\Delta T_c$  el líquido se pone en movimiento con una velocidad cada vez mayor. El valor de  $\Delta T_c$  representa un punto de bifurcación, y el diagrama nos recuerda inmediatamente a la primera parte del diagrama de Feigenbaum de la figura 10, a la primera bifurcación, en torno a  $r=1$ , cuando la población pasa de ser cero a crecer poco a poco. ¿Qué cabe esperar si aumentamos la temperatura un poco más?

### Helio en una caja pequeña

En 1977 otro gran experimentador, también francés y también *normalien*, esto es, exalumno de la Escuela Normal, llevó los experimentos sobre la convección de Rayleigh-Bénard a un grado de precisión y sofisticación desconocidos hasta entonces. Si Bénard había usado vapor de agua para controlar la temperatura, y eso lo había llevado a usar sustancias que son sólidas a temperatura ambiente, Albert Libchaber buscó su líquido entre las sustancias gaseosas a temperatura ambiente: el helio.

Libchaber nació en París en 1934, en el seno de una familia judía de origen polaco. Cuando los nazis invadieron Francia sus padres lo enviaron, junto con su hermano mayor, Marcel, al sur de Francia, con la esperanza de que allí tuvieran más posibilidades de sobrevivir. Se hicieron pasar por huérfanos católicos provenientes de Alsacia y consiguieron la ayuda de algunas personas, entre ellas un jefe de la policía local de Pétain. Aunque sus padres sobrevivieron a la guerra, su madre perdió a toda su familia, y su padre a la mayor parte de la suya.

Tras graduarse en Matemáticas en la Universidad de París en 1956 y como ingeniero de telecomunicaciones en la Escuela Nacional Superior de Telecomunicaciones en 1958, Libchaber obtuvo una beca Fullbright, que le llevó a trabajar en Illinois con el ya premio Nobel de Física John Bardeen, una de las grandes figuras de la física del siglo xx y uno de los pocos científicos que ha ganado dos veces el premio Nobel. De vuelta en París fue llamado a filas y enviado al Sáhara para luchar en la guerra contra los independentistas argelinos. Enrolado en el escuadrón de armas atómicas, participó en uno de los primeros ensayos nucleares franceses, realizados en el desierto en torno a 1960. En 1965, Libchaber terminó su doctorado en la Escuela Normal Superior.

La forma de enfocar la ciencia por parte de Libchaber siempre fue muy original. Según él mismo decía en una entrevista: «Soy judío y francés. Francés es ser racional, matemático. Judío, una visión mística del estudio y el aprendizaje». Para él los científicos y los conocedores del Talmud hacen algo similar: «Hay un mensaje en clave, que hay que descifrar».

Desde su estancia en Illinois, Libchaber se interesó por la física de las bajas temperaturas, lo que le llevó al estudio del helio superfluido. El helio líquido, estado en el que se encuentra este elemento por debajo de 4,22 K (4,22 grados por encima del cero absoluto), presenta propiedades sorprendentes si desciende la temperatura por debajo de 2,17 K. En particular se anula su viscosidad, por lo que fluye sin fricción. Ese estado se conoce como *superfluido*.

En torno a 1977 Libchaber decidió usar sus conocimientos de criogenia para estudiar el viejo problema de Rayleigh-Bénard en

### EL PROBLEMA DE RAYLEIGH-BÉNARD

El problema de Rayleigh-Bénard es uno de los más antiguos de la física. Fue descrito por primera vez en 1900 por el británico, el profesor de la Royal Naval College de Greenwich, John Rayleigh. En 1916 Rayleigh publicó un artículo en el que expuso sus propias conclusiones: «Influencias de resultados obtenidos por Bénard». La tesis de Bénard, defendida en 1900, afirmaba que el fluido uniformemente caliente en reposo si no hay convección horizontal, de temperatura. Pero esta situación es inestable y el líquido de las capas inferiores, menos densa, tiende a ascender. Lord Rayleigh dedujo, de las ecuaciones de movimiento del fluido, que había una cierta diferencia de temperatura crítica por debajo de la cual el líquido permanecía en reposo, mientras que por encima de ella se movía formando estructuras convectivas. Rayleigh predecía tanto la diferencia de temperatura crítica como el tamaño de las celdas convectivas.

### Bénard retoma el problema

Bénard no pudo leer el artículo de Rayleigh hasta que acabó la guerra, cuando Rayleigh ya había muerto, por lo que no pudo discutir con él los resultados. El caso es que Bénard tomó cuidadosas medidas tanto del tamaño de sus celdas de convección como de la diferencia de temperatura a la que empezaba a observarse el movimiento. Y si bien las primeras se ajustaban a lo predicho por Rayleigh, la segunda presentaba fuertes discrepancias. Estas no fueron explicadas hasta los años cincuenta del siglo pasado, cuando varios científicos comprendieron que la tensión superficial desempeñaba un papel relevante en los experimentos de Bénard. Sea como fuere, el comportamiento dinámico que se produce en un líquido que se calienta desde abajo es conocido hoy día como *problema de Rayleigh-Bénard*.



Lord Rayleigh en un retrato del pintor escocés sir George Reid.

helio líquido en estado normal, no superfluído, a tres grados por encima del cero absoluto. ¿Qué ventajas podía tener este líquido frente a los usados por Bénard? Aun sin ser superfluído, el helio líquido presenta una viscosidad muy inferior a la de la mayoría de los líquidos, y había solo unos experimentos preliminares, realizados por Guenter Ahlers, de la convección de Rayleigh-Bénard en estas condiciones.

Libchaber usó una caja de acero inoxidable que, en su interior, tenía del orden de un milímetro de ancho y de profundo y menos de un milímetro de alto. En una caja tan pequeña solo era de esperar que cupiera una celda de convección, con el líquido ascendiendo por el centro y bajando por las paredes, formando dos «rollos» paralelos. La pequeña caja de acero tenía una entrada aún más pequeña para el helio líquido y estaba encerrada en una cámara de vacío sumergida, a su vez, en un baño criogénico. La parte inferior estaba en contacto con una placa de cobre cuya temperatura era controlada por una delicada resistencia eléctrica. La parte superior estaba hecha de un cristal de zafiro. Una sonda en miniatura monitorizaba la temperatura en un punto de la parte superior de la celda. La temperatura de esta sonda local servía como marcador del movimiento del líquido. Un rotulador registraba sobre papel continuo cómo evolucionaba con el tiempo la temperatura de la sonda. Para que nos hagamos una idea de lo delicado del experimento montado por Libchaber, baste decir que la convección del helio dentro de la caja se iniciaba cuando la diferencia de temperatura entre la parte inferior y la superior era de unas dos milésimas de Kelvin, y la temperatura se controlaba con una precisión de hasta un microkelvin (una millonésima de kelvin).

Tras casi dos años de minucioso trabajo llegó el momento de poner en marcha el experimento. Todo el equipo trabajaba día y noche y la temperatura de la sonda encargada de monitorizar la convección arrojaba sus datos sin parar. Al principio, una vez establecida la convección, la sonda marcaba una temperatura constante, lo que quería decir que el helio se movía dentro de su celda a una velocidad que no cambiaba con el tiempo y de acuerdo con un patrón establecido. Al ir aumentando la diferencia de

temperatura, Libchaber comprobó que muy pronto, justo por encima del umbral en el que el helio empezaba a moverse, el rotulador que marcaba la evolución de la temperatura se desplazaba de un lado a otro periódicamente, oscilando cada dos segundos. La interpretación que cabía hacer de este hecho era que la columna central ascendente de líquido se bamboleaba a un lado y a otro de la celda. Para una diferencia de temperaturas todavía mayor aparecía otro periodo, ahora de cuatro segundos, superpuesto al anterior. La temperatura de la sonda presentaba máximos cada dos segundos, como antes, pero estos máximos no eran iguales, sino que uno era más alto que el otro, repitiéndose la secuencia entera cada cuatro segundos.

Libchaber encontró así una secuencia continua de bifurcaciones cada vez más cercanas unas de otras. Cada bifurcación aportaba una periodicidad cuyo periodo duplicaba al anterior. A partir de un cierto valor de la diferencia de temperaturas, el comportamiento de la sonda y, por tanto, el del líquido, se volvía caótico. Albert Libchaber no sabía entonces que ese comportamiento que él había encontrado en el helio líquido encerrado en una pequeña caja era el mismo que Robert May había visto en su aplicación logística. Libchaber había descubierto el primer sistema experimental que mostraba un comportamiento caótico determinista.

## UNIVERSALIDAD

Mitchell Feigenbaum nació en Nueva York en 1944, hijo de inmigrantes judíos. En 1970 se doctoró en Física de Partículas en el Instituto Tecnológico de Massachusetts, el MIT. Tras pasar por otro de los grandes centros universitarios de Estados Unidos, la Universidad de Cornell, recaló en el Laboratorio Nacional de Los Álamos. Su objetivo allí era, en principio, estudiar la turbulencia en los fluidos. En particular, comprender cómo se producía la transición de un movimiento laminar a uno turbulento.

En un flujo laminar el fluido se mueve de manera ordenada y suave. Cada partícula sigue una línea bien definida, llamada

líneas de corriente, y las líneas de corriente discurren paralelas unas a otras, sin mezclarse, como formando láminas, y sin cambiar con el tiempo. Por el contrario, el movimiento turbulento se caracteriza por la irregularidad. Las partículas del fluido siguen trayectorias cambiantes y su velocidad fluctúa continuamente. Además, en un flujo turbulento abundan los torbellinos. A velocidades suficientemente bajas los flujos suelen ser laminares, como el humo justo al salir de la punta de un cigarrillo. Pero, al aumentar la velocidad, los flujos se vuelven turbulentos, como también vemos en el humo de un cigarrillo un momento después. Esta transición de flujo laminar a turbulento era lo que interesaba a Feigenbaum en Los Álamos.

Hemos visto que el comportamiento de la población en el mapa logístico usado por May pasaba por sucesivas bifurcaciones en las que el periodo se iba duplicando, hasta que, finalmente, la evolución del número de individuos de la población se volvía caótica. Este mismo comportamiento de desdoblamientos de períodos sucesivos fue observado experimentalmente por Libchaber en su caja de helio. Estando en Los Álamos, y con el fin de reflexionar sobre la forma en que la turbulencia aparecía en los fluidos, Feigenbaum decidió tomar la aplicación logística como modelo. Jugando con una calculadora de bolsillo, descubrió que las sucesivas bifurcaciones obedecían a una ley sencilla. Para verlo, designamos con  $r_n$  los valores en los que se produce la bifurcación con periodo  $2^n$ , y definimos el siguiente cociente:

$$\delta_n = \frac{r_{n+1} - r_n}{r_{n+2} - r_{n+1}}.$$

Al aumentar el valor de  $n$ , los valores de  $\delta_n$  tienden a un número fijo  $\delta = 4,6692016\dots$  Es decir, las distancias sucesivas entre dos bifurcaciones van disminuyendo en progresión casi geométrica, por lo que, al final, los valores de  $r_n$  convergen a un valor fijo  $r_\infty = 3,5699456\dots$  Este valor de  $r$  corresponde a un periodo de repetición infinito, es decir, la secuencia de valores no se repite nunca. Representa el límite a partir del cual se establece el caos.

El mismo Feigenbaum atribuye su descubrimiento al hecho de que usó una calculadora de bolsillo para obtener los sucesivos valores de  $r_n$ . Otros investigadores que, como May, se habían interesado por la aplicación logística, usaban ordenadores para realizar las iteraciones de manera automática. El hecho de tener que buscar los puntos de bifurcación uno por uno, lo que llevaba su tiempo, obligaba a Feigenbaum a tratar de adivinar dónde se produciría la próxima bifurcación y eso le llevó a descubrir que se sucedían en una progresión casi geométrica.

Habiendo encontrado una regla que determinaba los puntos de bifurcación de la aplicación logística, la usada por May, Feigenbaum decidió hacer lo mismo para otra función sencilla. Probó con otra función que no contenía un término cuadrático como la de May, sino una función trigonométrica. El nuevo sistema presentaba la misma cascada de bifurcaciones. Usando el mismo cociente para calcular los sucesivos valores de  $\delta_n$ , se llevó una sorpresa mayúscula: convergían al mismo valor  $\delta = 4,6692016\dots$

Feigenbaum pronto comprendió que el valor del número  $\delta$  no dependía de la forma particular de la función que escogiera. Bastaba con que la función tuviera un máximo similar al que observamos en la representación de la figura 3 (pág. 53), para que las distancias entre las sucesivas bifurcaciones convergieran a este número.

Como hemos dicho, Feigenbaum había estudiado física de partículas en el MIT. Estaba familiarizado con las técnicas de renormalización que se aplican en electrodinámica cuántica para eludir ciertas cantidades infinitas que aparecen en la teoría. Feigenbaum usó técnicas similares para demostrar la existencia de  $\delta$  y calcular su valor. La idea fundamental del procedimiento que usó reside en la autosimilaridad que vimos reflejada en los diagramas de las figuras 10 y 11 (págs. 59 y 60): si hacemos un *zoom* en el diagrama de la figura 10, obtenemos una figura similar a la

De alguna forma lo maravilloso de la Tierra es que hay cosas bellas en ella, cosas maravillosas y atractivas, y gracias a tu trabajo quieres llegar a comprenderla.

MITCHELL FEIGENBAUM

original. Se trata, pues, de encontrar los valores de escala adecuados que nos llevan de una figura a otra.

Los valores fijos del diagrama de Feigenbaum corresponden a soluciones de la ecuación  $x = f(x)$ . Por ejemplo, a  $r = 2$  le corresponde en el diagrama de la figura 10 el valor  $x = 0,5$ , que es solución de  $x = rx(1-x)$  para ese valor de  $r$ , como es fácil comprobar. Cuando se produce la bifurcación que lleva al primer desdoblamiento de periodo, el comportamiento que vemos en la figura 6, los puntos del ciclo de dos valores que se observa son solución de  $x = f(f(x))$ , porque tras dos aplicaciones de la función volvemos al mismo valor. Por ejemplo, para  $r = 3,2$  los dos puntos del diagrama de la figura 10 corresponden a  $x = 0,513$  y  $x = 0,8$ , de forma que  $f(0,8) = 0,513$  y  $f(0,513) = 0,8$ . Luego se tiene que  $f(f(0,8)) = 0,8$  y  $f(f(0,513)) = 0,513$ . Tras la siguiente bifurcación, los valores del ciclo de orden 4 son solución de  $x = f(f(f(f(x))))$ , y así sucesivamente. Las funciones compuestas, como  $f(f(x))$ ,  $f(f(f(f(x))))$  y siguientes, tienen una forma fastidiosa, como el lector puede imaginar, pero Feigenbaum estudió su forma aproximada alrededor de los puntos solución y encontró que todas se podían superponer si se escalaban con un factor adecuado. Ese factor permitía calcular el valor de  $\delta$ .

Al darse cuenta de que la constante  $\delta$  no dependía de la forma concreta de la función que utilizaba, Feigenbaum comprendió que su descubrimiento era algo profundo. Suele ocurrir en física que los detalles *cuantitativos* de muchos fenómenos son similares, pero los valores *cuantitativos* son diferentes. Por ejemplo, las transiciones de fase de sólido a líquido o de líquido a vapor de las sustancias químicas se producen siempre de manera similar y se describen con la misma teoría termodinámica, pero la temperatura a la que se producen, los calores latentes de fusión o ebullición, o la cantidad de calor que la sustancia intercambia con el exterior durante el proceso, son diferentes en cada caso. En la cascada de Feigenbaum ocurre justamente lo contrario: funciones diferentes, que describen fenómenos muy diversos y *cuantitativamente* diferentes, llevan a una cascada sucesiva de bifurcaciones que dan lugar a una misma *cantidad*,  $\delta$ .

Cuando Albert Libchaber aplicó la teoría de Feigenbaum calculó el cociente entre los sucesivos valores de bifurcación de la diferencia de temperaturas entre las placas superior e inferior de su caja de helio. Dentro de las incertidumbres experimentales, los sucesivos cocientes se aproximaban al valor predicho por Feigenbaum.

¿Por qué un modelo tan simple como el de May y Feigenbaum es relevante para algo tan complejo como un fluido en movimiento? Recordemos que el número de grados de libertad de un sistema es el número mínimo de números que es necesario dar para especificar su estado. Pues bien, en un medio fluido los grados de libertad disponibles son, en principio, infinitos, ya que hay que especificar la velocidad y la temperatura de cada punto. Pero la caja de Libchaber es tan pequeña, y la diferencia de temperaturas tan exigua, que el helio se mueve dentro de forma bastante ordenada. El líquido está *forzado* a moverse en dos rollos, luego las partículas del fluido se mueven de forma coordinada, y de los infinitos grados de libertad existentes en principio, solo unos pocos son relevantes. Una vez que el sistema se desestabiliza, si lo hace por una bifurcación por desdoblamiento de periodo, la aplicación logística capta lo esencial del proceso.

Feigenbaum tituló sus artículos usando expresiones como «comportamiento universal», «universalidad cuantitativa» o «propiedades métricas universales». ¿Qué quería expresar con el uso del adjetivo *universal*? Lo que Feigenbaum pretendía resaltar con el uso de esta palabra era que el campo de aplicación de su teoría era enorme, y que el escalado de las sucesivas bifurcaciones sería siempre el mismo en todos los fenómenos que presentaran una cascada subarmónica, siempre y cuando la función subyacente presentara un máximo simple.

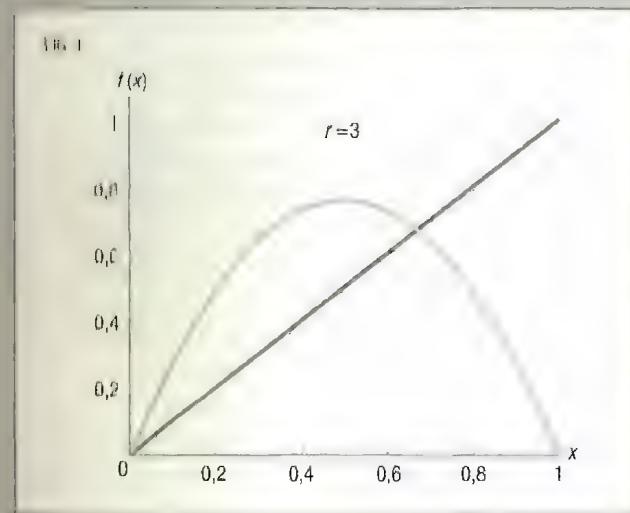
No se puede objetar nada a Feigenbaum por usar el término *universal* en este contexto. En física se utiliza la expresión *constante universal* para referirse a las constantes fundamentales que aparecen en las leyes físicas básicas. Por ejemplo, en la ley de la gravedad de Newton aparece una constante que se denomina *constante de gravitación universal*. Esta constante es universal en el sentido de que es la misma para todos los

## CÁLCULO DE LA CONSTANTE DE FEIGENBAUM

En la figura 1 se muestra la gráfica de la función  $f(x) = rx(1-x)$  para  $r=3$ . La curva es una parábola que se abre hacia abajo, con su vértice en  $(0,75)$ . La recta  $y=x$  es la diagonal de la unidad. La curva se interseca con la recta en los puntos  $(0,0)$  y  $(1,0)$ , que son los puntos de equilibrio. Los puntos  $x=0$  y  $x=1$  son puntos de bifurcación. La pendiente de la curva en  $x=0$  es  $1$ , por lo que los puntos de bifurcación son inestables. La pendiente de la función en  $x=1$  es  $-2$ , por lo que los puntos de bifurcación de la función  $f(x)$  son estables. La pendiente de la curva en  $x=0,5$  es  $-1$ , por lo que el punto de bifurcación en  $x=0,5$  es un punto de equilibrio estable. Los puntos de bifurcación de la función  $f(x)$  se corresponden con los puntos de bifurcación de la recta  $y=x$  en la figura que la representa. Por eso, en la figura 1 se observa el efecto de la recta de equilibrio desplazada: que la pendiente de la curva en la bifurcación sea, en valor absoluto, mayor o menor que  $1$ . Si es mayor que  $1$ , los puntos de bifurcación son inestables, y si es menor que  $1$ , son estables. En este caso, la derivada de  $f(x)$  es igual a  $-1$  en  $x=0$  y se hace  $-1$  en  $x=0,667$ .

## Segundo Iteración

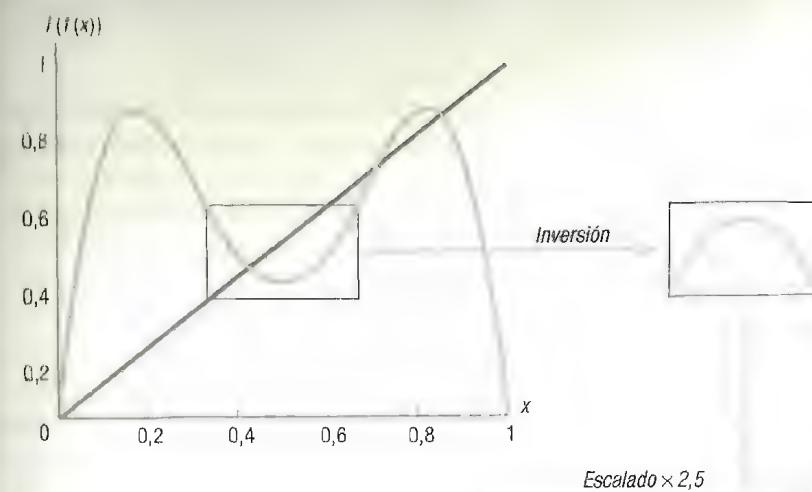
En la figura 2 se muestra la iteración  $f(f(x))$ , es decir, la función que resulta de iterar dos veces la aplicación  $f$ . El valor de  $r$  escogido es ahora  $3,499$ , cercano a la siguiente bifurcación. De nuevo se observa que la gráfica con la recta  $y=x$  marca los puntos solución que corresponden a un equilibrio estable. Hoy ya se aprecian claramente los puntos inestables:  $x=0$  y  $x=0,717$ , y dos puntos cuya derivada se ha hecho menor que  $-1$ . Si nos fijamos en la zona recuadrada de esta figura vemos que los puntos de bifurcación en la gráfica de  $f(x)$ , solo que está doblado. Si le damos la vuelta y la ampliamos adecuadamente podemos superponer las dos gráficas. Esto se muestra en la figura 3.



### Superposición de las gráficas

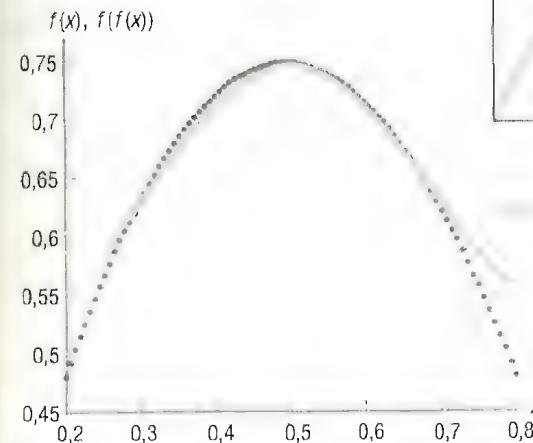
En la figura 3 los puntos representan la función  $f(x)=rx(1-x)$  sin escalar para  $r=3$ . La línea continua es la función  $f(f(x))$  para  $r=3,499$  escalada por un factor 2,5 e invertida. Feigenbaum descubrió que las sucesivas gráficas de las iteraciones de  $f(x)$  en los puntos de bifurcación se podían superponer si se escalaban con el factor adecuado. Esto le permitía calcular  $\delta$ .

FIG. 2



Escalado  $\times 2,5$

FIG. 3



cuerpos, independientemente de su composición o de cualquier otra variable, y es la misma en todos los lugares y en todos los tiempos. En ese mismo sentido, los valores de escala encontrados por Feigenbaum son también universales. Sin embargo, esta denominación ha llevado a algunos escritores seudocientíficos y esotéricos a ver en el descubrimiento de Feigenbaum un contenido místico del que está claramente exento.

La cascada subarmónica, o de Feigenbaum, o de desdoblamiento de periodo, que todos esos nombres recibe, es solo una de las rutas conocidas hacia el caos. Fue la primera en ser descrita en detalle y, quizás, la mejor entendida de todas. Con el tiempo, físicos y matemáticos han encontrado y descrito otras rutas hacia el caos que comparten con la de Feigenbaum varias características, siendo la universalidad, en el sentido ya explicado, una de ellas.

En el primer capítulo vimos dos de las señas de identidad del caos determinista: un comportamiento irregular y la sensibilidad a las condiciones iniciales. Esta segunda propiedad significa que, partiendo de dos estados muy próximos, un sistema caótico puede evolucionar a estados futuros muy diferentes. En este capítulo hemos añadido dos características nuevas: la autosimilaridad y la universalidad. Por *autosimilaridad* entendemos que los sistemas caóticos producen estructuras, como el diagrama de Feigenbaum, que se asemejan a sí mismas a distintas escalas de observación. Por *universalidad* entendemos el hecho de que sistemas muy diversos llegan al comportamiento caótico a través de las mismas rutas.

## ¿Qué tiene de extraño un atractor extraño?

El comportamiento caótico en sistemas deterministas gira en torno a un concepto matemático descubierto en la segunda mitad del siglo xx: el atractor extraño, un objeto geométrico de características muy especiales.

Los objetos fractales están íntimamente ligados a las matemáticas del caos. En este capítulo una máquina imaginaria nos va a ayudar a entender qué es un fractal. Más adelante veremos qué relación tienen los fractales con los sistemas dinámicos.

Llamaremos a nuestra máquina «fotocopiadora reductora múltiple». Dada una imagen cualquiera, el triángulo de la figura 1a, por ejemplo, la fotocopiadora reductora múltiple la reduce primero a la mitad, de ahí el calificativo *reductora*, y luego la copia tres veces, y de ahí que la llamemos *múltiple*. Las tres copias se disponen formando un triángulo equilátero, como muestra la figura 1b. Nuestra máquina genera así una figura de salida, que consiste en tres copias reducidas de la figura de entrada original.

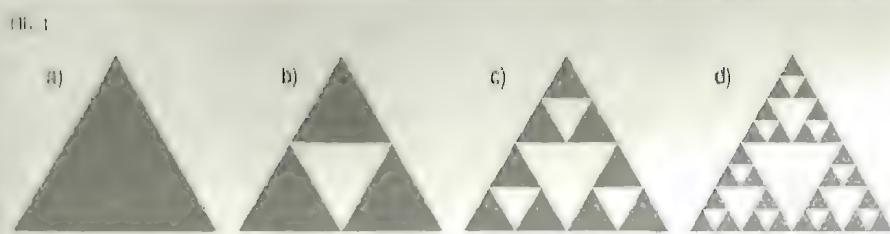
Utilicemos ahora la fotocopiadora reductora múltiple reiteradamente, metiendo en ella como figura de entrada la figura de salida obtenida en el paso anterior. Si introducimos la figura obtenida en la primera aplicación, obtendremos la figura 1c, y si introducimos la figura 1c obtendremos la figura 1d. Repetir el mismo procedimiento seis veces produce la figura 2. El triángulo de Sierpinski, llamado así en honor del matemático que lo imaginó, es el conjunto que se obtiene repitiendo este proceso un nú-

mero infinito de veces. Aunque es imposible dibujar el triángulo de Sierpinski, porque ello supondría tener una precisión infinita en el dibujo, la figura 2 es ya una buena aproximación a él. Como tantas veces ocurre en matemáticas, el triángulo de Sierpinski es una abstracción, un objeto ideal, resultado de un proceso infinito, que en la práctica solo es realizable de manera aproximada. Cuantas más iteraciones hagamos, más nos acercamos al objeto matemático abstracto.

El triángulo de Sierpinski es un conjunto fractal y tiene todas las características de este tipo de objetos. Entre ellas destacan dos: la autosimilaridad y la dimensión fractal. La autosimilaridad significa que al ampliar un fragmento de la imagen se nos revela una imagen igual a la original. Este concepto ya lo encontramos en el capítulo anterior, al referirnos al diagrama de Feigenbaum. Debido a la autosimilaridad, un fractal es una figura geométrica que no se revela más simple cuando la vemos en escalas más y más pequeñas cada vez. Por esta razón, un fractal es necesariamente un objeto de aspecto quebrado, rasgo del que deriva su nombre.

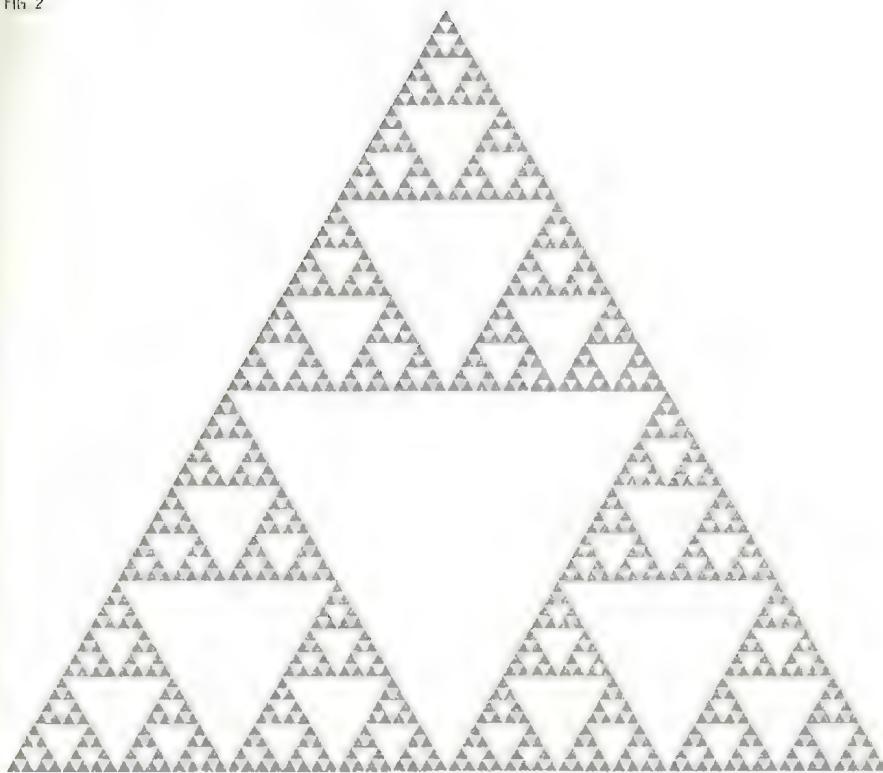
La segunda característica de los fractales que queremos destacar aquí es su dimensión. El triángulo de Sierpinski no es asimilable a una curva convencional y tampoco es una superficie. Por ello, su dimensión no es uno, como corresponde a una curva, ni dos, como correspondería a una superficie. En general, a un objeto fractal no se le pueden atribuir las medidas habituales de la geometría, como longitudes, áreas o volúmenes. En particular, el triángulo de Sierpinski parece tener una longitud infinita, pero su área es cero. Así, se dice que la dimensión de los fractales no es un número entero, sino que es fraccionaria. *Dimensión fractal* es la expresión usada. La dimensión atribuida al triángulo de Sierpinski es de 1,5849.

La forma en que hemos construido el triángulo de Sierpinski nos muestra dos características adicionales de los objetos fractales que están en el origen de su relación con el caos: los conjuntos invariantes y el concepto de información. La «fotocopiadora reductora múltiple» es una operación que transforma un trozo del plano, el folio que fotocopiámos, en el mismo trozo del



Construcción de un triángulo de Sierpinski con una «fotocopiadora reductora múltiple».

FIG. 2



Triángulo de Sierpinski (aproximación obtenida tras seis aplicaciones sucesivas de la «fotocopiadora reductora múltiple»).

## DIMENSIÓN FRACIAL DEL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI

Los sistemas que generan fractales tienen un punto fijo: el punto de partida. A partir de él se aplica una transformación, y se obtiene un resultado. La transformación es una contracción, es decir, si lo dividimos el lado por  $2^{-n}$ , donde  $n$  representa la iteración, así el volumen del cuadro se divide por  $2^n$  (la longitud),  $2^{-n}$  la dimensión y el cambio de medida proporcionalidad (que pasa de cuadrado al triángulo), y el volumen de un cubo se divide por  $2^n$ . El cuadrado es el objeto de dimensión 2 y el cubo, de dimensión 3.

### Cálculo de la dimensión fractal

Para calcular la dimensión fractal del triángulo de Sierpinski, construyémoslo de una forma intuitiva o lo que oímos en el texto principal, aunque ambos procedimientos son equivalentes. Se traza la sucesión de un proceso iterativo en el que vamos a ir numerando los pasos: 0, 1, 2, ... y así cada paso transforma un objeto de longitud y área diferentes, que denotaremos  $l_0, l_1, l_2, \dots$  para las longitudes, y  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$  para las áreas. Tomemos un triángulo equilátero con lado igual a unidad:  $l_0 = 1$  (un metro, por ejemplo). El área ( $a_0$ ) de este triángulo es su base ( $1$ ) por su altura ( $\sqrt{3}/2$ ) dividido por dos, lo que da:

$$a_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Copiamos el mismo triángulo tres veces, como se muestra en la figura, pero sin reducirlo. La figura obtendrá tiene un lado que mide  $l_1 = 2l_0$  y un área total  $a_1 = 3a_0$ . Si volvemos a copiar esta figura otra, tres veces de la misma forma, el lado de la nueva figura mide  $l_2 = 4l_0$  y su área es  $a_2 = 9a_0$ . Cada iteración duplica la longitud del lado del objeto y multiplica por 3 su área. Si aplicamos el proceso  $n$  veces, tendremos que la longitud del lado es  $l_n = 2^n l_0$  y su área  $a_n = 3^n a_0$ . Por analogía con la definición usual, la dimensión del triángulo de Sierpinski tiene que ser la relación  $a_n \sim l_n^D$  en el límite  $n \rightarrow \infty$ . Tomando logaritmos a uno y otro lado de la ecuación, obtenemos:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_n}{\log l_n} = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,585.$$



Construcción del triángulo de Sierpinski para el cálculo de su dimensión fractal.

plano, otro folio de igual tamaño. En cierto sentido es un sistema dinámico: para cada imagen inicial, la aplicación reiterada de la fotocopiadora genera una secuencia de imágenes. Esta secuencia va convergiendo a una imagen final, el triángulo de Sierpinski, a la que se acerca cada vez más. De hecho tal vez el lector se haya dado cuenta de que la imagen de partida es irrelevante: da igual que empecemos las iteraciones con un círculo, un cuadrado, un triángulo, o una foto de la reina de Inglaterra, al cabo de muchas iteraciones ese detalle inicial se va difuminando y la figura del triángulo va emergiendo poco a poco. El triángulo de Sierpinski es el patrón al que tienden todas las imágenes tras la aplicación reiterada de nuestra fotocopiadora. Y si empezáramos directamente con él las iteraciones sucesivas, lo dejarían invariante. El conjunto de Sierpinski es, por tanto, un «punto fijo» de nuestra aplicación del folio sobre el folio. Y es a la vez un atractor, todas las imágenes tienden a él tras sucesivas iteraciones.

En cuanto a la información, probablemente el lector también se habrá dado cuenta de lo que ocurre: la aplicación sucesiva de la fotocopiadora reductora múltiple produce la pérdida progresiva de información. Poco a poco vamos perdiendo los detalles de la imagen original, que, en el infinito, desaparecen totalmente. Esta pérdida de información está relacionada con el hecho de que la fotocopiadora reductora múltiple es una transformación contractiva: dados dos puntos cualesquiera del plano, la contracción los acerca en la siguiente iteración.

## LA GEOMETRÍA FRACTAL DE LA NATURALEZA

La palabra *fractal* fue inventada por Benoît Mandelbrot en 1975, inspirándose en el latín *fractus*, para designar la geometría de objetos similares al triángulo de Sierpinski. Mandelbrot nació en Varsovia en 1924 en el seno de una familia judía. La inminente persecución nazi llevó a su familia a buscar refugio en París en 1936. Antes de que los nazis llegaran a la capital francesa, huyeron de nuevo hacia el sur y se instalaron en un pueblo cercano a Limoges. Al acabar la guerra, de vuelta en París, el joven Benoît

## EL CONJUNTO DE CANTOR

En el año 1883 el matemático Georg Cantor, que ya había demostrado la existencia de conjuntos innumerables, realizó una construcción que hoy lleva su nombre: el conjunto de Cantor.

Comenzamos en el segmento  $[0, 1]$ , el segmento de Euler, y partimos de la recta entre los puntos  $0$  y  $1$ :

Eliminamos el punto central, como se muestra en la figura.

Este punto central, quitado del centro, con lo que dejamos dos segmentos iguales de longitud:

Al repetir la operación,  $n = 2$ , volvemos a hacer lo mismo con cada uno de los segmentos que quedan: dividimos en tres partes iguales y quitamos la del centro. Como resultado de la operación, tenemos cuatro segmentos iguales, cada uno de  $1/9$  de longitud del segmento inicial. Volvemos a repetir el proceso,  $n = 3$ , con lo que obtenemos 8 segmentos de longitud  $1/27$ . El conjunto de Cantor es el que se obtiene cuando este procedimiento continúa infinito de veces.

### Un conjunto de infinitos puntos

Una pregunta que, en el límite de infinitas iteraciones, nos quedamos sin nada, es decir, con un solo punto, el punto vacío. Claramente no es el caso, porque tanto el extremo izquierdo, el cero, como el extremo derecho, el uno, del segmento inicial no los quitamos nunca. La operación quita en cada iteración los puntos extremos de los sucesivos segmentos. Así pues, el resultado de la iteración, en realidad, un número infinito de puntos. Sin embargo, su longitud es cero. Un cálculo simple muestra que la longitud de los segmentos que tenemos en cada iteración es  $2^n/3^n$ . Este valor tiende a cero cuando  $n$  tiende a infinito.



Construcción del conjunto de Cantor. La letra  $n$  indica las iteraciones.

aprobó los exámenes de acceso a la Escuela Normal y la Escuela Politécnica, e ingresó en esta última.

Algunos años antes, Henri Poincaré, el gran matemático y físico francés nacido en Nancy en 1854, mantuvo un debate abierto con otros matemáticos sobre los fundamentos de las matemáticas. El alemán David Hilbert era el más insigne de sus oponentes. Hilbert abogaba por fundamentar las matemáticas sobre una base puramente formal: construir todo el edificio de las matemáticas partiendo de unos pocos postulados de los cuales se deducían todos los teoremas, usando para ello las reglas inobjetables de la lógica. A esta concepción Poincaré oponía una visión en la que la intuición era imprescindible. De Poincaré son estas palabras, pronunciadas en el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en París en 1900: «De este modo la lógica y la intuición tienen cada una su propio papel necesario. Ambas son indispensables. La lógica, que es la única que puede dar certezas, es el instrumento de la demostración. La intuición es el instrumento de la invención».

Pero Poincaré era un hombre que trabajaba en solitario y casi no tuvo discípulos. Por ello no creó escuela. A pesar de que tuvo en vida un gran prestigio en su país, a su muerte las matemáticas francesas no siguieron su estela. Al otro lado de la frontera, David Hilbert sí tuvo innumerables colaboradores y su influencia se extendió, desde Alemania, a toda Europa. Cuando Benoît Mandelbrot inició sus estudios en la Escuela Politécnica, la misma donde se había formado Poincaré más de medio siglo antes, las concepciones filosóficas de los matemáticos franceses estaban más cerca de Hilbert que del célebre matemático de Nancy. Y Mandelbrot, un joven especialmente dotado para el dibujo y con una singular visión espacial, encontraba poco satisfactoria esa forma de concebir las matemáticas.

Un ejemplo del ambiente de las matemáticas francesas en esa época lo da la definición del número  $\pi$  que aparece en un tratado de Nicolas Bourbaki, nombre imaginario con el que firmaba sus publicaciones un grupo influyente de matemáticos. Bourbaki define así el número  $\pi$ : «La función  $e(x)$  admite en todo punto de  $\mathbb{R}$  una derivada igual a  $2\pi ix$ , donde  $\pi$  es una constante positiva». No

es necesario entender esta definición para imaginar el grado de abstracción al que se había llegado. Uno de los números más conocidos de todas las matemáticas, ligado históricamente a la geometría, aparece desprovisto de cualquier connotación intuitiva.

Tal vez para huir de este ambiente, poco después de terminar sus estudios en París Mandelbrot emigró una vez más, en esta ocasión a Estados Unidos, donde se asentó. Allí se integró en el centro de investigación de IBM Thomas J. Watson Research Center, donde empezó a interesarse por todo tipo de problemas, desde las subidas y bajadas del precio del algodón hasta la frecuencia con que se producen los fallos en los circuitos electrónicos.

En 1982 Mandelbrot publicó *La geometría fractal de la naturaleza*, una revisión expandida de un primer ensayo sobre el mismo tema escrito en 1977. El texto reunía las incursiones del autor en diversos campos. En él hablaba de economía, de galaxias, de turbulencia, de la longitud de la costa de Inglaterra, de arte, de montañas y de muchas más cosas. Mandelbrot sostenía que las curvas continuas y diferenciables tan queridas para los físicos, aquellas que se pueden dibujar sin levantar el lápiz del papel, no eran la herramienta adecuada para describir muchos de los patrones y formas geométricas que encontramos en la naturaleza. En su libro Mandelbrot introdujo conceptos que hoy día son esenciales en el campo del caos determinista: las nociones de conjunto fractal, dimensión fractal y autosimilaridad.

De entre los muchos ejemplos que describe en su obra, la longitud de la costa de Inglaterra se ha convertido quizás en el paradigma por excelencia de objeto fractal. ¿Cuánto mide la costa de Inglaterra? Podemos empezar tomando un mapa con una escala determinada, por ejemplo 1:2250 000, y medir con una regla la longitud de la costa. Obtendríamos un determinado valor. Si repetimos la misma operación con un mapa con una escala mayor, 1:100 000, por ejemplo, aparecerán detalles y pliegues en la costa que no eran perceptibles en el primer mapa, con lo que la medida de la longitud total se incrementaría. El caso es que, a medida que aumentamos el detalle con el que describimos la costa, su longitud aumenta, y parece que no hay un límite, por lo que la longitud real sería infinita. La situación contrasta con la de

una curva de la geometría convencional. Por ejemplo, podemos inscribir en una circunferencia un polígono de  $n$  lados, cada uno de longitud  $l_n$ .

La longitud total de la circunferencia la podríamos aproximar entonces por  $n$  veces la longitud de los lados, esto es,  $nl_n$ . A medida que aumentamos el valor de  $n$ , el polígono se parece cada vez más a la circunferencia, y la longitud total medida por este procedimiento se acerca más y más a la longitud conocida de la circunferencia,  $2\pi R$ , donde  $R$  es el radio (a Bourbaki esta definición de  $\pi$  como el cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro seguramente le parecería poco rigurosa). La longitud de las curvas sencillas de la geometría se puede determinar sin ambigüedad por este procedimiento. Pero este falla para un objeto como la costa de Inglaterra: la suma de los segmentos en que hemos dividido el contorno crece indefinidamente a medida que estos son más pequeños.

Este hecho ya había sido observado por algunos científicos. En particular, por el mismo Lewis Richardson que encontramos en el capítulo primero, el que intentó predecir el tiempo atmosférico con papel y lápiz. Su conclusión fue que las costas de los países, sus fronteras y otras características similares no tienen una longitud definida, y que la longitud atribuible depende de la regla con que la midamos. Pero Benoît Mandelbrot supo reinterpretar estos datos dando un salto cualitativo. La costa de Inglaterra no tiene una longitud definida porque es algo más que una curva, aunque menos que una superficie: la costa es fractal. Y Mandelbrot se aplicó a tratar de determinar, aunque fuera aproximadamente, la dimensión fractal de las costas de varios países. Esta dimensión resultó ser próxima a 1,5 en varios casos. Además, Mandelbrot ideó un algoritmo para generar objetos fractales que asemejaban la costa de una isla o de un continente. En su libro se pueden ver algunos de estos objetos generados por ordenador.

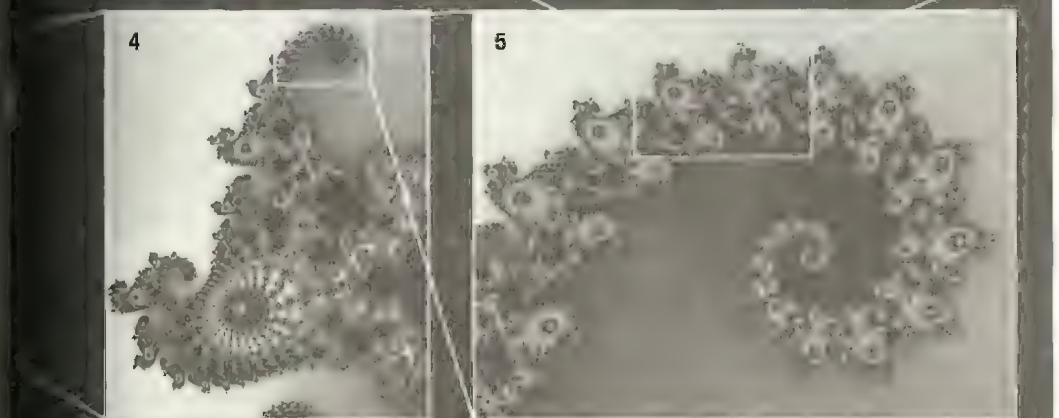
Cabría decir que *La geometría fractal de la naturaleza* disgustaba por igual a físicos y matemáticos. Para un matemático, Mandelbrot no demostraba nada. Para un físico, Mandelbrot no explicaba nada. La costa de Inglaterra es fractal, de acuerdo, pero ¿por qué? preguntaría un físico. Incluso aunque Mandelbrot



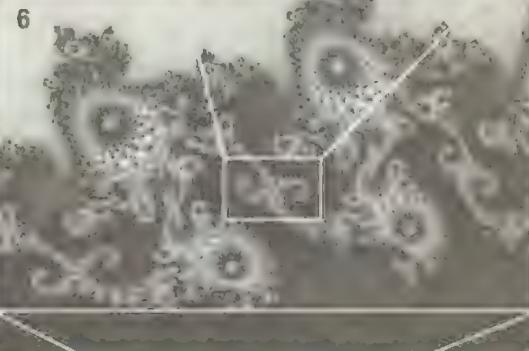
El conjunto de Mandelbrot, a vista de una serie de saltos de escala. En la parte inferior izquierda, se aprecia en la imagen 2 se trata con el nombre de valle del Ciudadito del Mar, debido a que los habitantes, que adoraron sus dos incognitas la anatomía de



El comando de Mandelbrot cambia la forma de la figura, y otra vez lo hacen  $z_0$  y  $C$ . No deben cumplirse condiciones adicionales que  $z_0$  valga 0 y que el numero complejo  $C$  que da pie a la formación del punto una serie de rotaciones cada vez mayores que divergen infinito. Su representación muestra que el punto de partida es una figura que se amplía. Entre las propiedades que exhibe el sistema de Mandelbrot se incluye la simetría exacta. Secciones de la estructura surgen por doquier a todas las escalas, pero con distorsiones que permiten reconocer un que «ampliación» nos encontramos



En las imágenes 4, 5 y 6 nos deleitaremos en la caja de uno de los caballitos de mar. La propia estructura de la espiral se multiplica en las formas 6, 7 y 8. En el centro de la figura 7, emerge de nuevo la silueta inconfundible del conjunto de Mandelbrot.



proporcionar algoritmos para simularla, ¿dónde estaban las leyes generales, los primeros principios? Sin embargo, la moderna teoría del caos y la complejidad no es concebible sin los conceptos introducidos por Mandelbrot. Mandelbrot no demostraba teoremas, cierto, pero dibujaba, calculaba, construía. Tampoco explicaba nada, pero describía, sugería, proponía, encontraba reglas allí donde otros solo veían desorden.

*La geometría fractal de la naturaleza* tuvo, y tiene, defensores y detractores. No es un libro para especialistas, pero tampoco para no iniciados. Tampoco se gana al lector alguien que desde el prefacio reclama para sí el honor de haber «fundado una nueva ciencia», como hace Mandelbrot. Pero es un libro que sorprende al lector a cada página y que le hace pensar y replantearse muchas ideas preconcebidas. Y ha sido, y sigue siendo, un superventas. Treinta años después de su publicación Benoît Mandelbrot ha recibido todos los honores y medallas imaginables. Y su obra es, sin duda, uno de los hitos de la literatura científica contemporánea.

## VUELVE LORENZ

Como vimos en el capítulo anterior, el meteorólogo Edward Lorenz había ideado un sistema de doce ecuaciones diferenciales que simulaban una especie de atmósfera «de juguete». Recorremos que una ecuación diferencial expresa matemáticamente el modo en que un sistema cambia continuamente en el tiempo. En esa atmósfera de juguete descubrió Lorenz la sensibilidad a las condiciones iniciales de los sistemas caóticos: dos estados inicialmente muy próximos daban lugar, al cabo del tiempo, a situaciones muy diferentes.

Lorenz entendió que había algo en la estructura matemática de su sistema que merecía estudiarse más a fondo. La atmósfera es lo que se llama un *sistema disipativo*: la viscosidad del aire tiende a frenar el movimiento, disipando la energía cinética del viento y convirtiéndola en calor, que, a su vez, se dispersa gracias a la conducción, la convección y la radiación. Un siste-

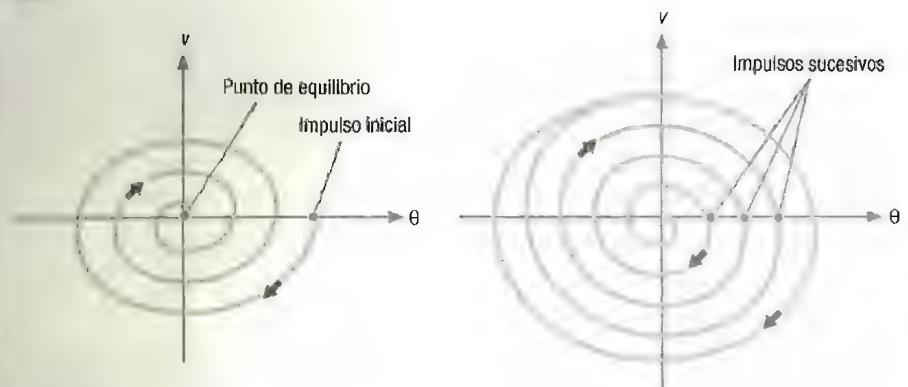
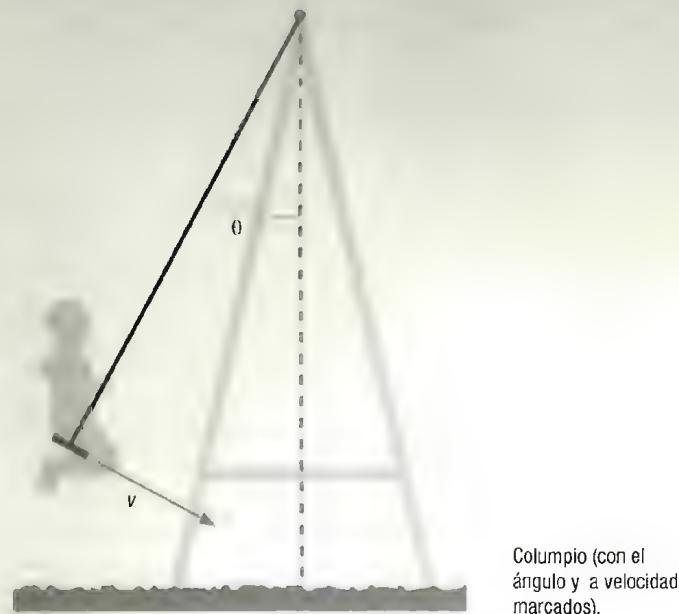
ma disipativo que no esté alimentado por una fuente externa de energía tiende al equilibrio. Por ejemplo, un columpio al que le hemos dado solo un impulso va frenándose poco a poco, debido al rozamiento, hasta que termina parándose en el punto más bajo. Podemos describir su estado mediante su posición (con el ángulo  $\theta$ ) y su velocidad  $v$  (figura 3).

Si representamos la trayectoria del columpio en el espacio de las fases, esto es, representando su posición en el eje de abscisas y su velocidad en el eje de ordenadas, obtenemos la imagen izquierda de la figura 4. La curva que describe el movimiento del columpio tiende a un punto, que representa al columpio parado en su posición de equilibrio. El columpio es un sistema dinámico, y el punto más bajo, su posición de equilibrio, es lo que se conoce como un atractor porque, independientemente del impulso inicial que demos al columpio, todas las trayectorias que dibujemos en el espacio de las fases acaban en el punto de equilibrio.

Supongamos ahora que decidimos impulsar el columpio regularmente, con la frecuencia adecuada para mantener una oscilación permanente. Si al inicio el columpio está en reposo, la trayectoria seguida en el espacio de las fases es la que muestra la imagen derecha de la figura 4. Esta trayectoria representa el hecho de que el columpio oscila cada vez con mayor amplitud hasta alcanzar un estado estacionario, en el que oscila sin variar su altura. El impulso que damos en cada periodo es justo el que compensa la pérdida de energía por la fricción de la cuerda con el punto de sujeción. La elipse que representa el movimiento sostenido en el espacio de las fases es también un atractor; en el argot matemático se conoce como *ciclo límite*.

En un caso genérico habrá estados del sistema que se repiten, o que sean aproximadamente los mismos una y otra vez, acercándose más y más. Estos estados pertenecen a un conjunto restringido, el atractor.

El columpio que impulsamos en cada oscilación es un sistema disipativo, pero que constantemente recibe un aporte de energía desde el exterior. De nuevo los físicos y matemáticos tienen una expresión específica para este tipo de sistemas: se trata de un sistema disipativo con un *forzamiento* externo.



Trayectoria de un columpio en el espacio de las fases. Izquierda: sin forzamiento; derecha: impulsado con la frecuencia adecuada.

Lorenz sabía que su atmósfera de juguete era un sistema dissipativo forzado. En el caso de la atmósfera, la energía externa la aporta el sol. Localmente, el sol calienta el suelo y las masas de aire circundantes tienden a ascender. La diferencia de calentamiento entre el ecuador y los polos alimenta también los sistemas globales de circulación atmosférica. Lorenz esperaba que la atmósfera, como sistema dissipativo forzado que era, tendiera a un atractor, a un conjunto restringido de estados. Pero sus resultados mostraban claramente que ese atractor no era ni un punto ni un ciclo límite, porque sus variables no tendían a valores estacionarios ni a oscilaciones regulares. Ni siquiera se trataba de una combinación de ciclos de diferentes frecuencias. Pero su atmósfera de doce variables era todavía demasiado complicada. Lorenz intentó simplificar aún más sus ecuaciones sin perder lo esencial: la variabilidad de las soluciones, que no se trataba de soluciones estacionarias, periódicas o fácilmente predecibles.

### El primer atractor extraño

En 1963 Edward Lorenz publicó en *Journal of Atmospheric Sciences* un artículo titulado «Flujo no periódico determinista». En él presentaba un modelo de tres ecuaciones diferenciales con solo tres variables. Este modelo no era ya una atmósfera simplificada, sino que representaba la convección de Rayleigh-Bénard en un rollo convectivo similar a los que Libchaber estudiaba en su caja de helio (figura 5).

Era una estructura convectiva espacialmente confinada, ya que el líquido no podía salir de la caja en la que estaba encerrado, pero dependiente del tiempo, porque la intensidad y la dirección del movimiento podían variar. De las tres variables, una daba cuenta de la velocidad máxima del líquido dentro del rollo; otra, de la diferencia de temperaturas entre la columna de fluido ascendente y la descendente, y la otra variable representaba el gradiente vertical de temperatura. El sistema contenía tres parámetros relacionados con las propiedades del líquido, las dimensiones de la caja y la diferencia de temperaturas entre los límites

Interior y superior de la caja. Las ecuaciones de Lorenz eran de apariencia simple, pero contenían los términos no lineales necesarios para ofrecer un rico comportamiento dinámico. Recordemos que en una función no lineal la función de una suma no es la suma de las funciones. El ejemplo más sencillo de función no lineal es  $x^2$ , ya que  $(x_1 + x_2)^2 \neq x_1^2 + x_2^2$ . La presencia de términos no lineales es imprescindible en el caos determinista.

El sistema de Lorenz reproducía cualitativamente el comportamiento experimental observado a medida que se aumenta la diferencia de temperatura. Cuando esta es baja, el líquido no se mueve y la situación es de equilibrio estable. En el espacio de las fases el estado del sistema está representado por un punto en el origen de coordenadas. Que se trate de un equilibrio estable significa que ante cualquier perturbación el sistema regresa a él. Es decir, si se produce externamente, por agitación o por cualquier otra causa, una pequeña oscilación de temperatura o de velocidad, el sistema vuelve a la situación de equilibrio, en este caso, al reposo. Al aumentar progresivamente la temperatura se produce una primera bifurcación, un cambio cualitativo en el comportamiento observado, y el líquido comienza a moverse formando un rollo: sube por un lado y baja por el otro. Si la temperatura no es muy alta, la velocidad no varía en el tiempo y esta es también una situación de equilibrio estable. Pero hay dos posibilidades equivalentes: que el rollo gire en el sentido de las agujas del reloj o en sentido contrario. Esta situación viene representada en el espacio de las fases por dos puntos simétricos.

Lorenz comprobó que, al aumentar suficientemente la diferencia de temperatura, el sistema de ecuaciones comenzaba a presentar la variabilidad que ya había observado en su anterior modelo atmosférico. Como ejemplo, la figura 6 muestra la evolución en el tiempo de la velocidad máxima dentro del rollo para determinado valor de la diferencia de las temperaturas superior e inferior. El signo positivo de la velocidad representa un rollo que se mueve en el sentido de las agujas del reloj. El signo negativo representa un movimiento en el sentido contrario.

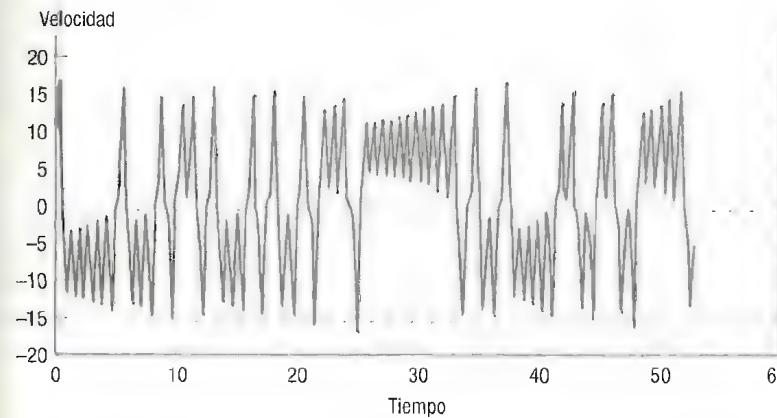
Observamos que la velocidad toma unas veces valores positivos y otras valores negativos, oscilando un número cambian-

do de acuerdo con el tiempo. La velocidad es positiva en el sentido de las agujas del reloj y negativa en el sentido contrario. La velocidad es positiva en el sentido de las agujas del reloj y negativa en el sentido contrario.

FIG. 5



FIG. 6

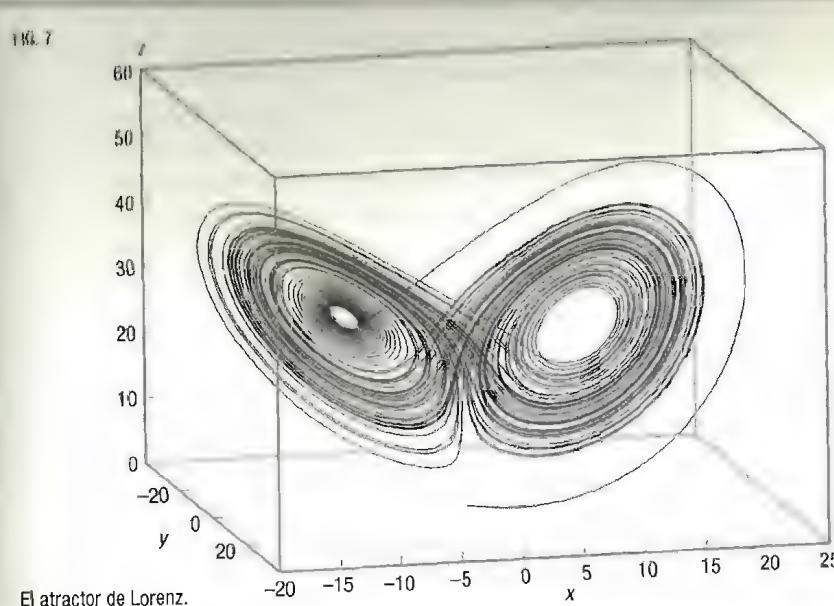


Evolución temporal de la velocidad máxima del líquido en el sistema de Lorenz para un conjunto escogido de parámetros. La velocidad oscila irregularmente alrededor de dos valores de signo contrario. El signo positivo significa que el fluido se mueve girando en el sentido de las agujas del reloj y el signo negativo, que se mueve en el sentido contrario. Las líneas discontinuas horizontales muestran los valores en torno a los cuales oscila la velocidad. El tiempo y la velocidad están expresados en unidades arbitrarias.

ta de veces en torno a dos valores, cercanos a  $\pm 7$ . El sistema «recuerda» que existían unos puntos de equilibrio, que representaban movimientos estacionarios del fluido, y da vueltas alrededor de ellos, pero sin llegar a estabilizarse en ninguno. El aumento de la diferencia de temperaturas y, por tanto, el ritmo al que inyectamos energía en el sistema, es la causa de esta inestabilidad.

La figura 7 es una representación en tres dimensiones de una trayectoria en el espacio de las fases durante un gran intervalo de tiempo. El sistema no acaba en un punto de equilibrio ni en un ciclo límite, sino que es atraído a una situación en la que vaga indefinidamente en torno a una zona limitada del espacio. Ha caído en un *atractor extraño*. Es un atractor porque todas las trayectorias iniciadas en sus cercanías acaban cayendo en él. Pero se le conoce con el apelativo de *extraño* porque no tiene ninguna de las formas geométricas convencionales: no es un punto ni una circunferencia ni una curva o superficie conocida.

El atractor extraño representa un estado estable del sistema en cuestión. Las trayectorias van hacia él y, una vez que llegan, permanecen allí. En un sistema caótico que muestre un atractor extraño, un estado inicial cualquiera no tiene por qué pertenecer al atractor, pero al evolucionar se le acerca cada vez más y termina en él. Una de las razones por las que Richardson fracasó en su primer intento de calcular numéricamente la evolución de la atmósfera, como vimos en el capítulo anterior, es que el estado inicial que él escogió no estaba suficientemente caracterizado. La dinámica atmosférica ya está en un atractor, por muchas dimensiones que tenga y por muy difícil que sea de caracterizar. Un conjunto cualquiera de presiones, temperaturas y demás variables no tiene por qué pertenecer a un estado posible de la atmósfera en ese atractor. Calcular la evolución de la atmósfera a partir de unos datos cualesquiera lleva, en general, a una situación transitoria, que no se corresponde con la evolución real de la atmósfera. Si un monstruo gigantesco llegara a la Tierra y soplara brutalmente sobre ella, sacaría a la atmósfera de su atractor. Eso originaría un periodo transitorio más o menos largo, con grandes oscilaciones de vientos, presiones y temperaturas, hasta



que la dinámica propia del sistema volviera a traer a la atmósfera a su régimen habitual. Richardson, sin querer, hizo el papel de monstruo, introduciendo unos valores iniciales que originaban fluctuaciones no realistas. Este es un problema que los meteorólogos han sabido resolver. Los valores observados no son siempre suficientemente precisos y pertenecen a una red irregular de observatorios. Antes de introducir los datos observados en los modelos numéricos, los meteorólogos los someten a un proceso de «inicialización» que produce unos valores iniciales que, por decirlo así, están ya dentro del atractor, con lo que se suprime oscilaciones espurias.

El atractor de Lorenz es el primer atractor extraño encontrado, pero el hecho de que Lorenz fuera meteorólogo y publicara sus resultados en una revista de meteorología hizo que pasara desapercibido en otros campos durante muchos años. No fue hasta mediados de la década de 1970 cuando el descubrimiento de Lorenz se dio a conocer en otros ámbitos y se reconoció

su relevancia. La expresión *atractor extraño* fue acuñada por el belga David Ruelle y el holandés Floris Takens en 1971. Aunque es un nombre «extraño» para un objeto matemático, e incluso la denominación ha sido criticada por algunos matemáticos que piensan que este tipo de atractor resulta extraño solo a quienes no lo entienden, la denominación se ha impuesto tanto en la literatura especializada como en los textos divulgativos.

## LA RECETA DEL CAOS

En un atractor extraño las trayectorias tienden a juntarse en una dirección, porque el atractor atrae todas las trayectorias de una cierta región del espacio de las fases, pero también tienden a separarse, porque si no no observaríamos la sensibilidad a las condiciones iniciales. En el atractor de Lorenz vemos estas dos características. La forma de mariposa es aproximadamente una superficie de dos dimensiones, aunque tiene cierto espesor, y cualquier trayectoria cuyos valores iniciales estén lejos de esta superficie casi bidimensional tiende a ella. Esto representa la contracción. Pero, a la vez, dos trayectorias inicialmente muy juntas pueden divergir rápidamente y dar vueltas cada una alrededor de uno de los dos centros del atractor. Ahí vemos la sensibilidad a las condiciones iniciales. Por esas dos razones, la receta para construir un atractor extraño es relativamente sencilla. Se trata de plegar y estirar, plegar y estirar.

El sistema de ecuaciones de Lorenz tiene tres variables. Es el número mínimo de variables que se necesita para producir caos en un sistema que dependa del tiempo de forma continua, esto es, en un sistema de ecuaciones diferenciales. Este hecho fue comprendido ya por Henri Poincaré, que en sus estudios de la mecánica celeste vislumbró que los sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales de tres o más variables podían llegar a tener soluciones muy complicadas, inabordables con los métodos de la época. En su camino por comprender los sistemas no lineales, Poincaré inició el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales. Renunciando a resolver con todo detalle las ecua-

ciones, ideó métodos y herramientas para entender la estructura global de las soluciones. Se interesó por cuestiones tales como cuántos puntos de equilibrio había, si eran estables o no, si había soluciones periódicas, etcétera.

La dificultad progresiva en abordar las ecuaciones diferenciales no lineales con los métodos del análisis matemático tradicional llevó a Poincaré del análisis a la geometría, y de ahí a la topología, de la que es considerado uno de los creadores. La topología se interesa no por la forma concreta de los objetos geométricos, sino por algunas características cualitativas tales como el número de piezas que los forman o el número de agujeros que tienen. Dos figuras son topológicamente equivalentes si podemos deformar una de ellas, sin cortar ni pegar trozos, de forma continua, hasta hacerla coincidir con la otra. Para un topólogo un triángulo, un cuadrado y una circunferencia son lo mismo.

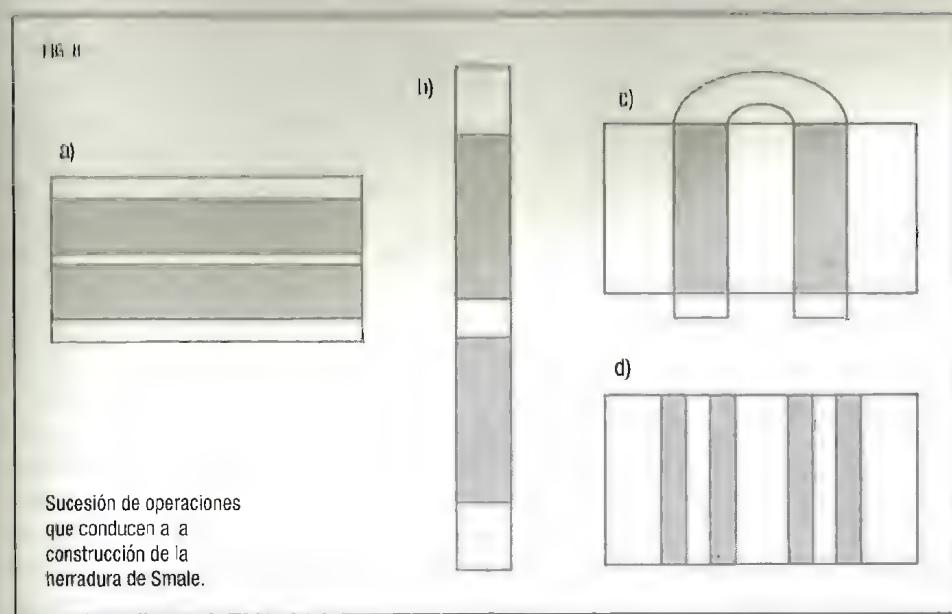
El matemático estadounidense Stephen Smale hizo el camino inverso al recorrido por Poincaré. Inició su carrera matemática trabajando en topología. Aficionado a colecciónar minerales y a navegar a vela, Smale hizo sus grandes descubrimientos inspirado por el mar en Río de Janeiro. Aunque, a decir verdad, el atractivo de Río no era solo la playa: allí estaba el matemático brasileño Mauricio Peixoto, autor de un importante teorema sobre la estabilidad de las órbitas de un sistema dinámico, con quien estableció un fructífero intercambio de ideas. Smale resolvió parcialmente uno de los problemas que había dejado abierto Poincaré: la conjetura de Poincaré. Poincaré había conjeturado que toda figura geométrica que no tuviera agujeros y que estuviera hecha de una sola pieza era topológicamente equivalente a una esfera. En el espacio ordinario la conjetura de Poincaré es fácilmente reconocible: cualquier poliedro, por ejemplo un cubo, puede deformarse continuamente hasta formar una esfera. Poincaré generalizaba este enunciado a objetos de cualquier dimensión (aunque no podamos hacernos una imagen intuitiva de estos objetos, los matemáticos idean esferas y poliedros en espacios de más de tres dimensiones). Pero no fue capaz de demostrarlo, y lo dejó como problema abierto en

uno de sus últimos escritos sobre topología. Pues bien, en 1961 Smale consiguió demostrar la conjetura de Poincaré para objetos de 7 o más dimensiones. Ese hallazgo le valió a Stephen Smale la medalla Fields, uno de los más prestigiosos galardones que puede recibir un matemático, que le fue entregada en el Congreso Internacional de Matemáticos en Moscú en 1966. La conjetura de Poincaré para dimensiones menores se mostró un hueso duro de roer, y no fue hasta los primeros años del siglo XXI cuando el ruso Grigori Perelman consiguió demostrarla para tres dimensiones. Ello también le valió a Perelman la medalla Fields, a la que renunció.

Temiendo que su éxito con la conjetura de Poincaré agotara sus posibilidades como matemático dentro del campo de la topología, Smale decidió cambiar de asunto y se interesó por los sistemas dinámicos. Como hemos dicho, en un sistema dinámico continuo, en el que el tiempo fluye continuamente y puede, por tanto, tomar cualquier valor, el número mínimo de variables necesarias para producir caos es tres, y es también el mínimo necesario para producir un atractor extraño. Recordemos que en un sistema dinámico discreto registramos la evolución del sistema en intervalos fijos de tiempo: días, años, generaciones, etcétera. En el caso de los sistemas dinámicos discretos, como la aplicación logística estudiada por May y Feigenbaum, podemos conseguir crear un atractor extraño con dos dimensiones. Y eso es lo que hizo Smale. En 1967 ideó un sistema dinámico discreto que contiene todos los ingredientes del caos. A este sistema se le conoce como *la herradura de Smale*.

### Smale idea una herradura

La idea esencial de la herradura de Smale es tomar un rectángulo, estirarlo en una dirección, doblarlo hasta formar una especie de herradura y luego quedarse con la intersección de la herradura y el rectángulo original. Después se trata de repetir la operación una y otra vez, estirando y doblando, estirando y doblando, tal y como haría un panadero con la masa del pan.



Veámoslo gráficamente en la figura 8. La herradura de Smale consta de dos transformaciones sucesivas. Consideremos la región de la figura 8a, que consta de un rectángulo en el que hemos marcado dos bandas sombreadas como referencia. En primer lugar, contraemos toda la región en la dirección horizontal hasta hacer que su anchura sea menos de la mitad de la anchura inicial. A la vez estiramos en la dirección vertical, de forma que el área total se mantenga. Con ello obtenemos una banda como la de la figura 8b. A continuación, dobraremos la banda obtenida para formar una especie de herradura, como muestra la figura 8c. De la herradura así obtenida nos quedamos solo con la parte que resulta de hacer la intersección con el rectángulo original. El resultado de la operación completa es que hemos llevado cada punto del rectángulo original a otra posición dentro del mismo rectángulo.

En la figura 8d vemos el resultado de realizar dos veces consecutivas la misma operación. Las dos bandas horizontales originales se han transformado en cuatro bandas verticales. Si vol-

## SMALE EN MOSCÚ

La conferencia de la medalla Fields el 17 de julio, un día dentro del Congreso Matemático de Moscú de 1966, celebrado en Moscú en agosto de 1966, estuvo acompañado de otros días de encuentros bilaterales entre amigos. Smale perdió la relación que le llevó al establecimiento y se había establecido anteriormente en contra de la guerra de Vietnam. En mayo de 1966, antes de ir a Moscú, estuvo en París con miembros destacados de la brecha francesa, como el matemático Laurent Schwartz, amigo suyo, o Jean-Paul Serre. Smale participó en Francia en un encuentro organizado por sus colegas franceses, donde pronunció unas palabras. Entre aplausos de la concurrencia, terminó su alocución diciendo: «Como americano me alegro, ahora avergonzado de mi país, y agradezco mucho que ustedes organicen y asistan a mitines como este». Y, entre aplausos, se dirigió a abrazar al representante en Francia de Vietnam del Norte, que asistía a la conferencia.

## La citación del Comité de Actividades Antiestadounidenses

En medio de viaje por Europa, y poco antes de ir a Moscú, Smale se enteró de que el Comité de Actividades Antiestadounidenses le había citado a declarar. Algunos periódicos de la difusión de su país le acusaron de haberse ido al extranjero para no declarar, e incluso, de estar compareciendo su huésped a Rusia. Algunos de sus amigos fueron también citados y acusados a declarar ante el comité, situación de la que Smale, finalmente, se libró. Él se tomó el asunto con cierto humor: «Tenía el prestigio de haber sido llamado a declarar, pero no el problema de haber tenido que hacerlo».

## Un amable secuestro

En Moscú, Smale entabló una relación más estrecha con algunos de sus colegas rusos. Entre otras cosas, le sorprendió que el anticomunismo de algunos de ellos era tal que preferían la victoria de Estados Unidos en la guerra de Vietnam, antes que a URSS siguiendo expandiendo su influencia. Un periodista vietnamita le solicitó una entrevista y Smale decidió dar una conferencia de prensa en la que estuvieran también presentes periodistas extranjeros. Esta tuvo lugar, de manera improvisada, en la escalinata de la Universidad de Múnich el 26 de agosto. Smale dirigió unas palabras a los asistentes en las que, ante el silencio de la prensa moscovita, criticaba duramente a Estados Unidos y su intervención en Vietnam. Pero condenó también la invasión de Hungría, diez años antes, por las tropas soviéticas. Smale denunció las acciones del Comité de Actividades Antiestadounidenses como una amenaza a la libertad de expresión, pero también la persecución de los intelectuales disidentes en la URSS. En ese momento, Smale fue requerido por el secretario de organización del congreso, que había puesto un coche a su disposición. Fue llevado de un lado para otro sin una intención, concreta. Todo parecía indicar que querían simplemente que no siguiera hablando públicamente. Sufrió algo así como un amable secuestro temporal. Por la noche pudo reunirse con sus amigos, preocupados por su suerte, en la clausura del congreso, y el día siguiente pudo tomar el avión de vuelta a Atenas, donde lo esperaba su familia.

venimos a estirar y doblar de la misma forma obtenemos ocho bandas aún más estrechas. Doblando y estirando muchas veces obtenemos una gran cantidad de bandas estrechas. Vamos generando así una estructura fractal: las bandas no llenan todo el rectángulo, por lo que no forman un objeto de dimensión dos, pero son más que una línea, por lo que su dimensión puede ser mayor que uno.

El efecto de estirar y doblar es semejante al que se produce cuando amasamos una masa de pizza. Si espolvoreamos de harina la masa, doblar y estirar muchas veces va extendiendo la harina incorporada por toda la masa, de manera más o menos homogénea. Partículas de harina que estaban muy cerca al espolvorear pueden acabar en extremos diferentes de la masa: la operación presenta sensibilidad a las condiciones iniciales. La herradura de Smale tiene pues dos de las señas del caos: fractalidad y sensibilidad a las condiciones iniciales.

## El atractor de Hénon: la herradura codificada

En 1976 el astrónomo francés Michel Hénon introdujo un sistema dinámico discreto bidimensional que contenía en una fórmula sencilla todos los elementos de la herradura de Smale. Hénon había llegado a interesarse por los sistemas dinámicos a partir de sus estudios sobre la formación y la estabilidad de los cúmulos globulares, agrupaciones densas de miles de estrellas ligadas gravitatoriamente. En 1976 Hénon se incorporó al Observatorio de Niza y allí, advertido de los estudios de Lorenz y otros sobre los atractores extraños, se decidió a usar su experiencia para tratar de visualizar un atractor de la forma más sencilla posible.

La transformación que Hénon ideó produce un atractor extraño bidimensional que se conoce como atractor de Hénon. El sistema dinámico de Hénon condensa en ecuaciones mate-

En la educación, tanto primaria como universitaria, soy contrario a hacer mucho énfasis en la tradición, en especial en matemáticas.

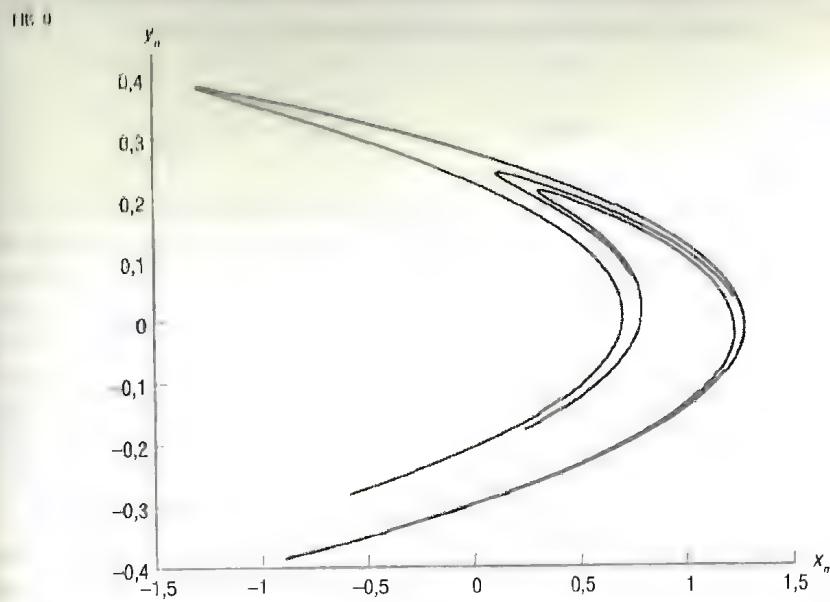
STEPHEN SMALE

máticos los elementos conceptuales de la herradura de Smale: doblar y entrar. Dado un punto del plano de coordenadas  $(x_0, y_0)$ , las ecuaciones de Hénon proporcionan las coordenadas de otro punto  $(x_1, y_1)$ . A partir de ahí, la aplicación sucesiva de la transformación de Hénon produce una secuencia de puntos  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots$  que se pueden entender como una trayectoria en el plano. Después de varias iteraciones, los sucesivos puntos tienden a un atractor que no es ni un punto ni una curva, sino un atractor extraño. Este atractor se representa en la figura 9.

El atractor de Hénon es una figura fractal. Su dimensión es 1,26, lo que quiere decir que no llega a llenar un área completamente, pero es algo más que una simple línea que se curva sobre sí misma. Si hacemos una ampliación de cualquier zona del atractor se nos revelan nuevas estructuras, similares unas a otras a diferentes escalas: es la autosimilaridad. La figura 10 muestra dos ampliaciones sucesivas. Se observa que, a medida que ampliamos la imagen, aparecen nuevas hebras que a una escala anterior no eran observables. Estas hebras se abren sucesivamente, ampliación tras ampliación. En principio el proceso se repite hasta el infinito. En la práctica, el número de hebras que consigamos revelar está limitado por la precisión del ordenador utilizado y el tiempo de cálculo. La autosimilaridad es una característica típica de los atractores extraños y aparece en otros objetos que ya hemos descrito, como el diagrama de Feigenbaum o el triángulo de Sierpinski.

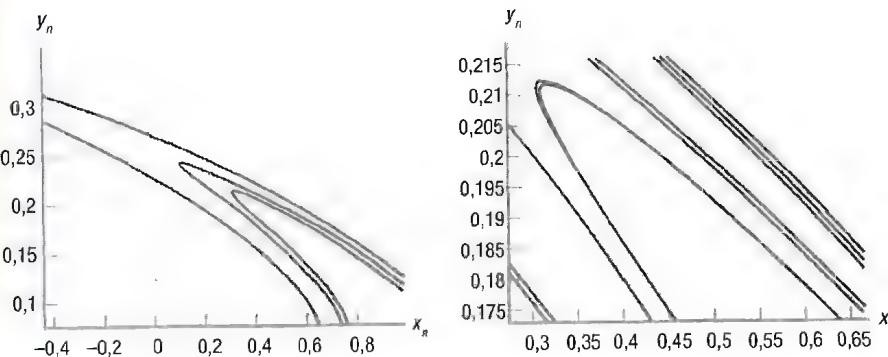
### El atractor de Rössler

Para terminar la presentación de los atractores extraños, presentaremos un atractor más, obtenido esta vez en un sistema dinámico continuo, esto es, descrito por ecuaciones diferenciales: el atractor de Rössler. Este atractor fue descubierto por el científico alemán Otto Rössler en el contexto de ciertas reacciones químicas. Se obtiene de un sistema de tres ecuaciones diferenciales, y lo vemos representado en la figura 11. De nuevo tenemos los dos



El atractor de Hénon es un atractor extraño. Se trata de una figura fractal compuesta por infinidad de fibras que se contienen unas a otras.

FIG. 10



Ampliaciones del atractor de Hénon. Nótese la escala en los ejes y compárese con la figura 9.

Ingredientes necesarios: estiramiento, que se produce a lo largo del eje  $z$ , y plegado, que se produce en el plano  $xy$ .

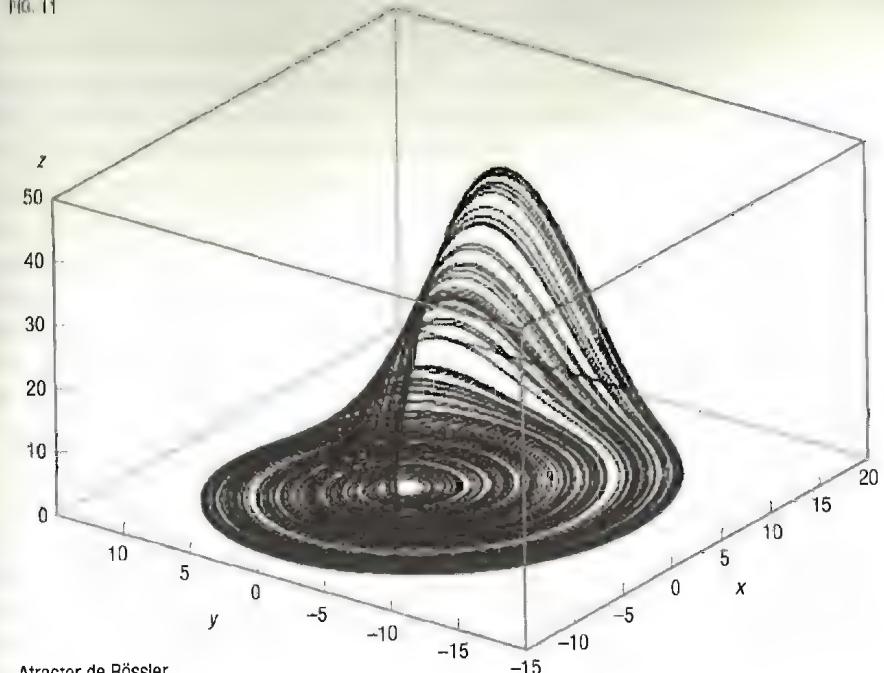
## MIDIENDO EL CAOS

En el primer capítulo vimos que tanto el sistema solar como la atmósfera se comportaban caóticamente. Resulta contradictorio que podamos predecir un eclipse con siglos de antelación y seamos incapaces de predecir el tiempo a dos semanas vista. Parece que un sistema es más caótico que otro. ¿Cómo podemos expresar esa diferencia de manera cuantitativa? Físicos y matemáticos han ideado varias herramientas que ayudan a cuantificar el caos en un sistema. En este epígrafe vamos a presentar tres de ellas: los exponentes de Liapunov, la información y las dimensiones fractales.

Los *exponentes de Liapunov*, llamados así en honor al matemático ruso Aleksandr Liapunov (1857-1918), cuantifican la sensibilidad a las condiciones iniciales. Consideremos un sistema dinámico continuo y, en él, dos trayectorias que se inician muy cerca una de otra, de tal forma que la distancia entre ellas es  $\delta_0$  (figura 12). Al evolucionar, la distancia  $\delta$  entre estas dos trayectorias variará con el tiempo. En los instantes iniciales la divergencia o convergencia de ambas trayectorias es exponencial, y el factor de crecimiento o decrecimiento de la distancia recibe el nombre de exponente de Liapunov,  $\lambda$ .

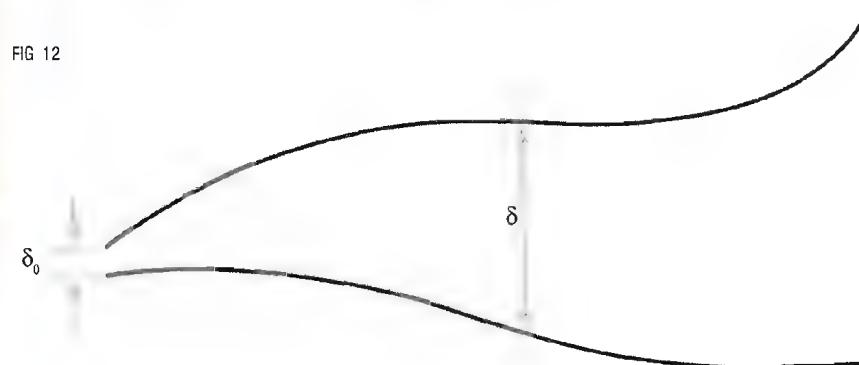
Si el exponente  $\lambda$  es negativo, las trayectorias se acercan; si es positivo, se separan. Un exponente de Liapunov positivo es síntoma inequívoco de caos determinista, porque significa que puntos que inicialmente están cerca se separan rápidamente: esto es la sensibilidad a las condiciones iniciales. El inverso del exponente  $1/\lambda$  es un tiempo, que representa la escala temporal a la que las divergencias entre las trayectorias se hacen notables. Para el sistema solar, ese valor es del orden de varios millones de años (el valor concreto depende de qué parte del sistema analicemos en detalle). Para el modelo atmosférico de Lorenz que presentamos en el capítulo 1, es del orden de se-  
ma-

FIG. 11



Atractor de Rössler.

FIG. 12



Exponentes de Liapunov.  $\delta_0$  es una distancia muy pequeña que inicialmente separa las dos trayectorias;  $\delta$  es la separación entre estas dos trayectorias al cabo de cierto tiempo. En este caso se ha representado un exponente de Liapunov positivo, ya que las trayectorias se separan.

mas. El caos atmosférico se revela así en una escala de tiempo mucho más pequeña.

Los atractores extraños tienen una fascinante relación con el concepto de información. Una señal periódica es perfectamente predecible. Si conocemos un ciclo podemos predecir con exactitud cuál será el nivel de la señal mucho tiempo después, ya que basta con repetir el ciclo tantas veces como sea necesario. Pero una señal caótica es impredecible a largo plazo, y el comportamiento del sistema durante un cierto lapso de tiempo no nos da información de lo que va a ocurrir después. A medida que el sistema evoluciona vamos, por lo tanto, perdiendo información. Esto ocurría, por ejemplo, con nuestra fotocopiadora reductora múltiple: los rasgos de la imagen inicial iban difuminándose a medida que realizábamos las iteraciones, para desvanecerse por completo en el infinito. Pero también hay cierta creación de información en un atractor extraño. Cualquier trayectoria dentro del atractor lo recorre una y otra vez, visitando continuamente regiones cercanas pero siempre diferentes. Así, a medida que seguimos una trayectoria cualquiera, se va revelando progresivamente la estructura del atractor. En este sentido, el atractor puede ser visto como un generador continuo de información.

Los atractores extraños son objetos fractales y, como tales, se caracterizan por su dimensión fractal. Pero hay una diferencia entre objetos fractales como el triángulo de Sierpinski y un atractor como el de Lorenz. El triángulo de Sierpinski es un objeto homogéneo. Todas sus partes son equivalentes, y el atractor tiene el mismo aspecto en cualquier región en la que nos fijemos. Pero un atractor extraño es el resultado de un proceso dinámico. Hay zonas que son visitadas con más frecuencia que otras. En una simulación por ordenador, las zonas más visitadas del atractor se resolverán con mayor precisión que las menos frecuentadas, por lo que la determinación de la dimensión fractal puede resultar difícil. Estas circunstancias han llevado a definir diferentes dimensiones, que se utilizan como herramientas que caracterizan no solo la geometría, sino también la dinámica del sistema.

## EL EFECTO MARIPOSA

«El aleteo de una mariposa en Brasil, ¿originó un tornado en Texas?» Ese era el título de una conferencia que Edward Lorenz pronunció en Washington en 1972 durante una reunión de

Puede ocurrir que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales engendren grandes diferencias en los fenómenos finales. Un pequeño error en las primeras produciría un enorme error en los últimos.

HENRI POINCARÉ

la Asociación Estadounidense para el Avance de la Ciencia. Lorenz escogió el título de su conferencia con la intención explícita de que resultara provocativo, sabiendo lo improbable que era una respuesta afirmativa a su pregunta, y es seguro que no previó —no podía preverlo— las consecuencias de su elección. Porque el llamado *efecto mariposa* ha trascendido el mundo de la meteorología y de la ciencia para pasar a ser un lugar común y dar nombre o aparecer en películas, canciones o series de televisión. Lo que Lorenz quería plantear, en un ámbito puramente meteorológico, era hasta qué punto la sensibilidad a las condiciones iniciales de los sistemas caóticos dificulta la predicción meteorológica, y ese era el tema de su charla. Con el aleteo de la mariposa quería ilustrar esa pequeña perturbación que puede hacer que dos condiciones iniciales aparentemente iguales no lo sean en realidad. Si la atmósfera es extremadamente sensible a las condiciones iniciales, la capacidad de predecir el tiempo será siempre muy limitada. Desde que Lorenz pronunció su conferencia, los sistemas de predicción se han perfeccionado hasta puntos insospechados y hoy en día las predicciones a menos de una semana vista son muy fiables. Pero algunas de las cuestiones que Lorenz planteaba siguen vigentes y la misma dinámica caótica de la atmósfera dificulta las predicciones a largo plazo, por más que se mejoren los sistemas de cálculo y de obtención de datos.

Aunque una mariposa en Brasil no pueda provocar un tornado en Texas, el efecto mariposa ha quedado como metáfora de la sensibilidad a las condiciones iniciales, una característica que

presentan en mayor o menor medida todos los sistemas caóticos deterministas.

Aunque el nombre de Lorenz ha quedado vinculado al efecto mariposa y la sensibilidad a las condiciones iniciales, en realidad se trata de un redescubrimiento, porque ya Poincaré lo había formulado, casi en los mismos términos, en su obra *Ciencia y método*:

¿Por qué los meteorólogos tienen tantas dificultades en predecir el tiempo? ¿Por qué la lluvia o las tempestades parecen llegar por azar, de forma que la gente encuentra natural rezar para que llueva o haga buen tiempo, mientras que encontrarían ridículo rezar para que se produzca un eclipse? Vemos que las grandes perturbaciones se producen generalmente en las regiones donde la atmósfera está en equilibrio inestable. Los meteorólogos ven bien que este equilibrio es inestable, que un ciclón va a originarse en alguna parte. Pero ¿dónde?, son incapaces de saberlo. Una décima de grado de más o de menos en un punto cualquiera y el ciclón estalla aquí y no allá y extiende su destrucción en zonas que de otra forma se hubieran salvado. [...] Aquí de nuevo encontramos el contraste entre una causa mínima, inapreciable para el observador, y efectos considerables, que son a veces terribles desastres.

Gracias al uso generalizado de los ordenadores, hoy tenemos multitud de ejemplos de esta sensibilidad a las condiciones iniciales. Los trabajos de Lorenz ilustran un comportamiento que Poincaré había predicho más de medio siglo antes.

## Caos clásico y caos cuántico

Los atractores extraños aparecen en sistemas en los que la energía no se conserva. Pero hay sistemas físicos en los que la energía se conserva. Es el caso del sistema solar, pero también del mundo de los átomos. En ellos el caos determinista se presenta bajo otro aspecto.

Ya sabemos que tanto el sistema solar como la atmósfera son sistemas caóticos. Sin embargo, hay una diferencia fundamental entre ambos: la atmósfera es, como hemos visto en el capítulo anterior, un sistema disipativo, mientras que el sistema solar no lo es, al menos en una primera instancia. La viscosidad del aire tiende a frenar los ciclones y torbellinos, disipando su energía mecánica en forma de calor. Por ello, la atmósfera necesita un aporte externo de energía, que recibe del Sol, para mantener su actividad. Pero el caso del movimiento de un planeta es distinto. Un planeta orbita alrededor del Sol viajando por el espacio vacío. No hay ninguna fricción que frene su movimiento y el astro describe una y otra vez su órbita elíptica alrededor del Sol sin necesidad de aportes externos de energía. La velocidad del planeta no es constante a lo largo de su órbita, sino que varía un poco. Cerca del perihelio, cuando está más cerca del Sol, su velocidad es mayor. En el afelio, cuando está más alejado, su movimiento se ralentiza. La energía mecánica del planeta consta de dos términos: la energía cinética, debida exclusivamente a su movimiento y proporcional al cuadrado de su velocidad, y la energía potencial, que es menor cuanto más cerca está del

Nol. Aunque cada una de estas energías varía a lo largo de la órbita, su suma, la energía mecánica total, se mantiene constante. Cuando un sistema mecánico se comporta de esta forma se dice que es un *sistema conservativo*. En física teórica este tipo de sistemas recibe el nombre técnico de *sistemas hamiltonianos*, en honor del físico y matemático irlandés William Hamilton (1805-1865).

En la vida cotidiana no hay sistemas hamiltonianos estrictamente hablando. La fricción y otros mecanismos disipativos son omnipresentes en la naturaleza, por lo que una descripción hamiltoniana de un sistema mecánico es siempre aproximada. Podemos describir relativamente bien, por ejemplo, el vuelo de una pelota de baloncesto hacia el aro como un sistema hamiltoniano. Pero esa descripción se revela totalmente insatisfactoria si queremos explicar la trayectoria de un balón de fútbol cuando, en un lanzamiento de falta, el jugador le da efecto para superar la barrera. En este caso no se pueden despreciar las fuerzas ejercidas por el aire, entre las que se incluye la fricción debida a la viscosidad. Igualmente, podemos imaginar un péndulo que oscila libremente como un sistema hamiltoniano, pero la energía se conserva solo aproximadamente, si consideramos unas pocas oscilaciones, porque la fricción del aire o el rozamiento de la cuerda con el punto sobre el que pivota lo detienen poco a poco.

Pero los sistemas hamiltonianos son de especial interés tanto en las pequeñas como en las grandes escalas espaciales. Ya hemos visto que el movimiento de un planeta, y por tanto el del sistema solar como un todo, es conservativo. En realidad, esto tampoco es estrictamente cierto porque hay algunos mecanismos disipativos, como los efectos de marea, pero estos son despreciables en muchos casos de interés, y sus consecuencias son perceptibles solo a muy largo plazo. En el otro extremo de la escala, en la escala atómica, la dinámica de los electrones dentro del átomo tiene lugar también en el espacio vacío y, según las leyes de la mecánica cuántica, en ausencia de mecanismos disipativos. Dentro del átomo, la energía del electrón es suma de la energía cinética y la energía potencial eléctrica, ya que la fuerza

de atracción entre el núcleo atómico y los electrones es eléctrica. Por lo tanto, los átomos también son sistemas hamiltonianos.

En los sistemas disipativos el caos determinista tiene su mejor expresión en la noción de atractor extraño, un objeto geométrico singular, caracterizado por tener una estructura fractal y autosimilar. En los sistemas hamiltonianos el caos se manifiesta de una forma diferente.

## LECCIONES DE UN PÉNDULO

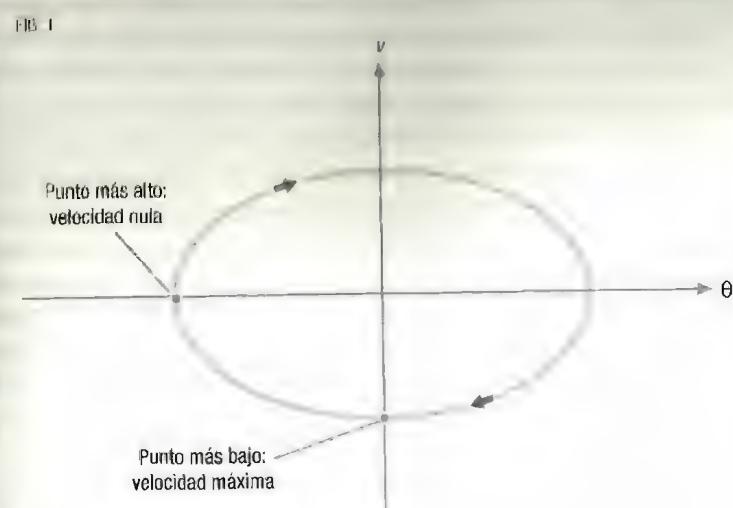
El paradigma de sistema hamiltoniano es el péndulo sin rozamiento. Consideremos un péndulo en el que una bola está sujeta al punto desde el que cuelga por una delgada barra rígida, un columpio idealizado. El espacio de las fases consiste en este caso en un diagrama donde anotamos en un eje la posición y en el otro la velocidad. La posición la da el ángulo ( $\theta$ ) que la bola forma con la vertical.

Cuando la bola se encuentra en reposo en su punto más bajo, la posición en el diagrama de fases de las variables  $\theta$  y  $v$  corresponde al punto en que el ángulo y la velocidad valen cero:  $\theta=0$ ,  $v=0$ . Si desplazamos ligeramente el péndulo de su posición de equilibrio, la bola ejecuta pequeñas oscilaciones. Cuando el desplazamiento es máximo  $\theta$  tiene un valor determinado por el desplazamiento inicial y su velocidad es cero. Luego la velocidad va aumentando (en sentido negativo) a medida que el ángulo disminuye. Cuando el ángulo se hace cero, la velocidad es máxima (de nuevo en sentido negativo). El ángulo cambia entonces de signo y la velocidad va disminuyendo (en valor absoluto). Cuando el péndulo se encuentra de nuevo en su separación máxima pero a la izquierda, la velocidad vuelve a ser cero y de nuevo empieza a acelerarse (figura 1).

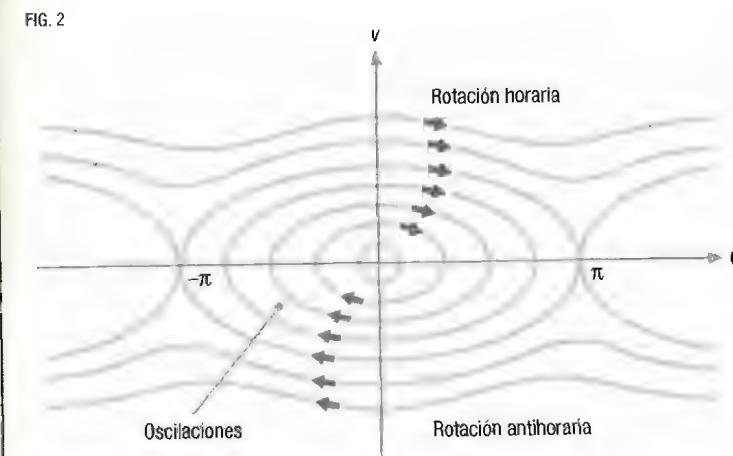
En el diagrama de las variables ángulo y velocidad ( $\theta, v$ ) el movimiento de ida y vuelta del péndulo viene representado por una línea cerrada, una elipse. Podemos imaginar ahora que repetimos la experiencia con distintos ángulos iniciales del péndulo. Cada movimiento subsiguiente vendrá representado por

una elipse diferente. Es posible, por lo tanto, representar en el diagrama todas las soluciones de la ecuación, que en este caso corresponden a curvas cerradas. En pequeñas oscilaciones el periodo del péndulo es siempre el mismo y sigue una ley que fue determinada en su día por Galileo. Pero si desplazamos el péndulo más y más cada vez, el periodo de las oscilaciones se va alargando. Llega un momento en que puede alcanzar el punto en el que la bola está por encima y en la vertical del punto del que cuelga. Si lo lanzamos con mucha fuerza, el péndulo empezará a rotar alrededor del eje, si el punto donde pivota lo permite. De un movimiento de oscilación pasamos a uno de rotación. Las trayectorias que describen este movimiento en el espacio de las fases tienen entonces un aspecto diferente y son, además, abiertas. La figura 2 resume estas posibilidades.

Junto al punto de equilibrio inicial, en el que la velocidad y el ángulo son iguales a cero, vemos que hay otro punto interesante en este diagrama en el que la velocidad también es cero pero el ángulo es  $\pi$ . Ambos son puntos de equilibrio del sistema, porque si damos justo esos valores a las variables, el péndulo se queda ahí, sin moverse. Pero tienen un carácter diferente. El punto en que la velocidad y el ángulo tienen valor cero corresponde al péndulo en la posición más baja, y es lo que llamamos un *equilibrio estable*. Si desplazamos un poco el péndulo de esa posición, tratará de volver a ella. Mientras tanto, cuando el ángulo vale  $\pi$  y la velocidad es cero, lo que corresponde a tener la bola arriba del todo, el equilibrio es inestable: cualquier pequeña perturbación hace que la bola se aleje de él, cayendo. Además hay dos tipos de curvas cualitativamente distintas en el diagrama: las curvas alrededor de  $\theta=0$  y  $v=0$  son cerradas, pero las curvas que representan movimiento de rotación, cuando superamos el punto superior de equilibrio, no lo son (aunque en la dinámica real también representan un movimiento periódico). En el diagrama los dos puntos de velocidad cero y ángulo  $\pi$  o  $-\pi$  son diferentes, pero representan la misma situación física: el péndulo en su posición más alta. La trayectoria que une estos dos puntos es una trayectoria especial y tiene reservado un papel particular en el caos determinista. El tiempo que tardaría



Representación en el espacio de las fases del movimiento de un péndulo.



Espacio de las fases del péndulo sin rozamiento.

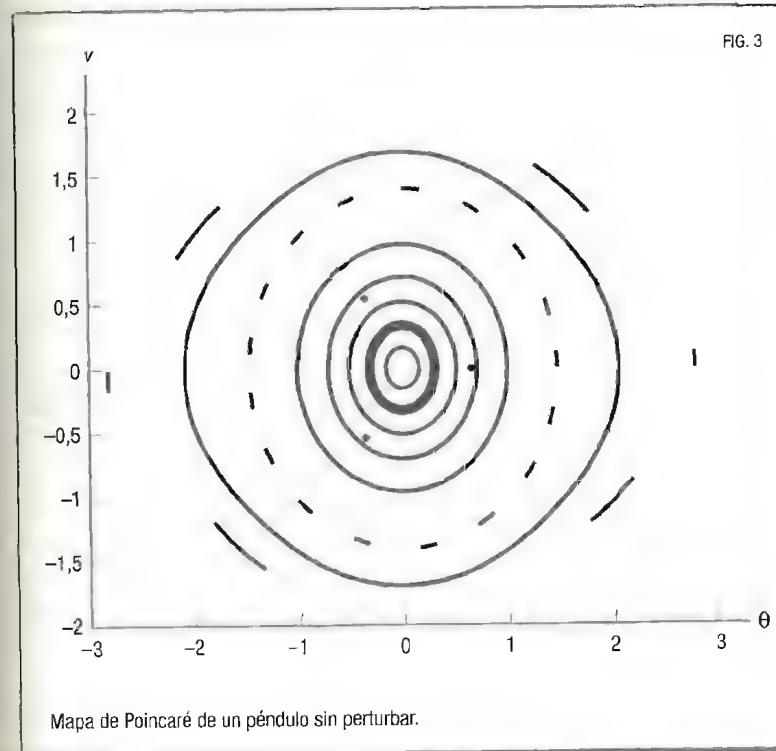
el péndulo en recorrer esta trayectoria sería infinito, porque va más y más lento según se acerca al punto más alto. Al requerir un tiempo infinito para describirla, esta trayectoria es irrealizable en la práctica. Es importante darse cuenta de que el periodo de las oscilaciones depende de la amplitud: crece y crece a medida que las oscilaciones son más amplias. Esta variación del periodo con la amplitud del movimiento es una consecuencia de que la ecuación diferencial que describe el movimiento del péndulo sea una ecuación no lineal. De todas formas, el péndulo así tratado es un sistema integrable: existe una expresión matemática que predice la velocidad y el ángulo como funciones del tiempo, dados sus valores iniciales. Y ello es así para todas las trayectorias posibles del espacio de las fases.

Perturbemos ahora esta situación. Sometamos nuestro péndulo a una fuerza periódica, como si columpiáramos a un niño con un periodo determinado. Y supongamos que el periodo de la fuerza es un poco mayor que el de las oscilaciones de pequeña amplitud. Teniendo en cuenta que para cada amplitud —cada altura máxima del péndulo— el periodo de oscilación es diferente, habrá una amplitud para la que el periodo de la fuerza aplicada sea resonante, es decir, el periodo natural de oscilación para esa amplitud será el mismo que el de la fuerza aplicada. En esas condiciones, empujaremos al péndulo de manera sincronizada con su movimiento e irá adquiriendo más y más energía. El péndulo aumentará su amplitud, pero al hacerlo aumentará también el periodo natural de oscilación, y pronto dejará de tener el mismo periodo que la fuerza aplicada, por lo que esta dejará de estar sincronizada con el péndulo y dejará de ser resonante. Todo ello produce una estructura particular en el espacio de las fases.

Para revelar mejor los detalles de esa estructura se usa habitualmente una herramienta matemática conocida como *aplicación* o *mapa de Poincaré*, ideada por el matemático francés. En un mapa de Poincaré no se representa una trayectoria completa en el espacio de las fases, sino el punto de la trayectoria cada cierto tiempo. Para un péndulo sometido a una fuerza periódica, el mapa de Poincaré se construye de la siguiente forma: se toma un punto inicial cualquiera del espacio de las fases como valor

inicial, se calcula su evolución a lo largo del tiempo, y se van marcando en el diagrama las posiciones que ocupa la trayectoria a intervalos de tiempo iguales al periodo de la fuerza periódica. El proceso se repite para distintos puntos iniciales, para explorar así todo el espacio de las fases.

Fijémonos en la figura 3 en el mapa de Poincaré del péndulo todavía sin perturbar. Hemos tomado como intervalo de tiempo para hacer el mapa uno un poco mayor que el tercio del periodo de las trayectorias centrales. Se observa que hay curvas cerradas que están completamente llenas. Estas corresponden a trayectorias cuyo periodo no es múltiplo del periodo elegido, y por eso la trayectoria pasa cada vez por un punto diferente de la gráfica. Pero observamos también trayectorias que solo presentan un número finito de puntos. En particular hay una trayectoria que



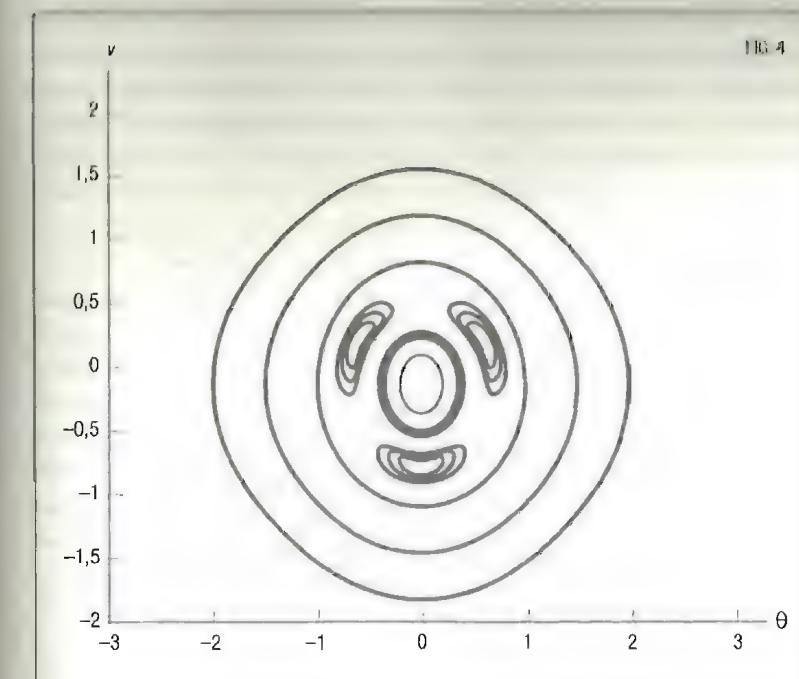
solo tiene tres puntos en este mapa de Poincaré, en la cuarta contando desde el interior hacia fuera. Estos tres puntos corresponden a una trayectoria cuyo periodo es justo tres veces el que hemos elegido para construir el mapa. Al cabo de tres iteraciones, el punto escogido vuelve al mismo sitio. También es notable la trayectoria más externa, muy cercana a un periodo que es seis veces el de referencia, y por eso presenta casi seis puntos. Entre ambas hay otra trayectoria con mayor número de puntos.

En general, las trayectorias con un periodo exactamente igual al que hemos usado de referencia aparecerían como un solo punto en el mapa de Poincaré, porque al cabo de un periodo se encontrarían de nuevo en el mismo sitio. Aquellas con un periodo igual a dos veces el de referencia aparecerían como dos puntos. En definitiva, las trayectorias cuyo periodo sea una fracción del periodo de referencia se convierten en una serie discreta de puntos en el mapa de Poincaré. Las trayectorias cuyo periodo no está en proporción racional al de referencia se van rellenando completamente. El mapa de Poincaré sin perturbar consiste entonces en una mezcla de curvas casi completamente dibujadas y puntos discretos.

¿Qué ocurre si aplicamos ahora una fuerza periódica aunque su intensidad sea pequeña? Pues sucede lo mismo que con los asteroides en el sistema solar. Las trayectorias que están en resonancia con la fuerza aplicada se ven fuertemente perturbadas. Esta perturbación da lugar a una curiosa estructura en el mapa de Poincaré, como se muestra en la figura 4. La zona en la que se encontraba la órbita cuyo periodo era tres veces el de la fuerza aplicada se ve fuertemente perturbada. Ahí se originan una especie de islas. Al mismo tiempo, se ve que hay zonas en las que las trayectorias originales casi se mantienen. Estas trayectorias están muy alejadas de resonancias importantes.

### La escuela soviética

Durante la época comunista, la física y las matemáticas encontraron en la URSS más reconocimiento que otras ramas de la



Mapa de Poincaré de un péndulo sometido a una fuerza periódica.

ciencia. Grandes nombres de estas disciplinas están asociados a la Unión Soviética, como es el caso de los físicos Lev D. Landau y Andrei Sajarov, o el matemático Andrei Kolmogorov. Kolmogorov fue una de las grandes figuras mundiales de las matemáticas del siglo xx. Trabajó en áreas muy diversas y se interesó por todos los grandes problemas de la época. Pero además, y no menos importante, Kolmogorov fue un gran profesor y bajo su dirección se formaron e iniciaron sus investigaciones otros grandes matemáticos soviéticos. En lo que aquí nos interesa, el nombre de Kolmogorov está asociado a uno de los teoremas más importantes de la teoría del caos determinista en los sistemas hamiltonianos: el teorema KAM.

Como vimos en el primer capítulo, las resonancias entre las distintas órbitas planetarias pueden desestabilizar las órbitas

de los planetas. Estas resonancias se producen cada vez que las órbitas de dos planetas tienen períodos cuyo cociente es un número racional. Como ya dijimos, Henri Poincaré demostró que las resonancias hacen imposible encontrar una solución analítica que representara el movimiento planetario en un intervalo infinito de tiempo. En el epígrafe anterior hemos visto cómo las resonancias producen una estructura particular en el espacio de las fases del péndulo sometido a una fuerza periódica.

En 1957 Kolmogorov dio una serie de lecciones sobre diversos temas relativos a los sistemas dinámicos. En la segunda parte del curso, expuso por primera vez el enunciado de un importante teorema: dado un sistema hamiltoniano integrable (como el péndulo sin perturbar, por ejemplo), hay una infinidad de trayectorias que se mantienen estables ante una pequeña perturbación. En la figura 4 vemos que, aunque hay zonas muy perturbadas por las resonancias, hay muchas trayectorias cercanas a sus correspondientes trayectorias sin perturbar. A medida que se aumenta la intensidad de la perturbación, más y más trayectorias irán destruyéndose.

Kolmogorov no dio una demostración pormenorizada de su teorema, sino que esbozó solo los pasos principales. La lista de problemas que interesaban a Kolmogorov era tan amplia que no escribía en detalle todo lo que hacía. Kolmogorov nunca publicó una demostración detallada de su teorema y todo parece indicar que hay puntos que no resolvió del todo. Uno de sus colaboradores, Vladimir Arnold, asumió la tarea de hacer una demostración pormenorizada del teorema de Kolmogorov. Arnold había realizado su tesis doctoral bajo la dirección del gran matemático. En particular, juntos habían resuelto el conocido como *décimo tercer problema de Hilbert*, relativo a las raíces de la ecuación de séptimo grado. En 1963 Arnold hizo una exposición detallada del problema de la perturbación de un sistema hamiltoniano, demostrando la existencia de órbitas estables para pequeñas perturbaciones. La idea central de la demostración está relacionada con la teoría de números, una de las ramas más difíciles de las matemáticas, y radica en el hecho de que hay órbitas en las que el cociente entre su periodo y el periodo de la perturbación es

lo suficientemente irracional como para que ninguna resonancia le afecte a largo plazo. Como hemos explicado, la resonancia se produce cuando el cociente de los períodos en juego, por ejemplo el del péndulo y el de la fuerza a la que está sometido, es un número racional. Luego si este cociente es irracional, la trayectoria en cuestión nunca será resonante. El matemático de origen alemán Jürgen Moser extendió y completó la demostración de Arnold. El teorema se conoce hoy en día por las iniciales de estos tres matemáticos: teorema KAM.

Si Kolmogorov creó una escuela de la que salieron grandes matemáticos, como el mismo Arnold o Yakov Sinai, Arnold, a su vez, influyó enormemente en toda una generación de matemáticos rusos. A partir de finales de la década de los sesenta, y hasta su muerte, Arnold organizaba todos los martes por la tarde un seminario en el que se reunían sus colaboradores. Al principio de cada semestre, Arnold se encargaba de presentar una lista de problemas interesantes, de todas las áreas de las matemáticas, para ser tratados y analizados. Cada uno escogía un problema y cada semana se debatían los progresos y las dificultades. De esta forma surgieron numerosos teoremas y nuevas teorías. Arnold era un gran deportista y solía esquiar grandes distancias en invierno. El deporte formaba parte de su método de trabajo. Según su propio relato, si un problema se le resistía, se ponía los esquís y se iba al campo. Al cabo de 40 km vislumbraba, si no la solución, al menos una idea de por dónde seguir. Y la idea solía ser correcta.

## UN CARO ERROR

En la figura 4 veíamos la estructura del mapa de Poincaré de un péndulo forzado. Las trayectorias predichas por el teorema KAM son claramente distinguibles, como también lo son las islas. Con ellas conviven zonas caóticas. Henri Poincaré fue el primero en vislumbrar la existencia de estas trayectorias caóticas. La historia de su descubrimiento está unida a un error que le costó una buena suma de dinero.

## EL TEOREMA KAM Y LA PROPORCIÓN ÁUREA

Todos los números se pueden representar mediante una fracción continua de la forma

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

Los números  $a_0, a_1, a_2, \dots$  son números enteros. Si el número en cuestión es un número racional, la fracción tiene un número finito de términos. Por ejemplo:

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Pero si se trata de un número irracional (irracional es todo número que no se puede expresar como cociente de dos enteros), la fracción continua se extiende hasta el infinito. Cualquier número irracional se puede aproximar por su correspondiente fracción continua truncada en un momento dado. Por ejemplo, el número  $\pi$  se aproxima bastante bien por la fracción:

$$\pi \approx 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}}$$

Sin embargo, una representación completa de  $\pi$  requiere infinitas fracciones, ya que se trata de un número irracional. Cuanto más grandes sean los números  $a_1, a_2, a_3, \dots$  mejor se aproximarán el número en cuestión por un número racional. El teorema de KAM asegura que al perturbar un sistema hamiltoniano hay trayectorias que apenas cambian. Para ello, estas trayectorias tienen que estar suficientemente alejadas de las resonancias, es decir, su periodo no debe estar en una proporción racional con el periodo de la perturbación. Pues bien, hay un número irracional que está más alejado que ningún otro de los números racionales. A este número le corresponde la siguiente fracción continua:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

En cada paso, el valor de los números  $a_1, a_2, a_3$  es el menor posible, 1, y por ello ningún racional es una buena aproximación. En la construcción de este número, lo que hay debajo de

cada trazo que se introduce en la fracción continua determina la parte entera. En particular, llegará al mismo resultado. Por lo tanto, cada trazo determina el valor de la fracción.

$$x = \frac{1}{1+x}$$

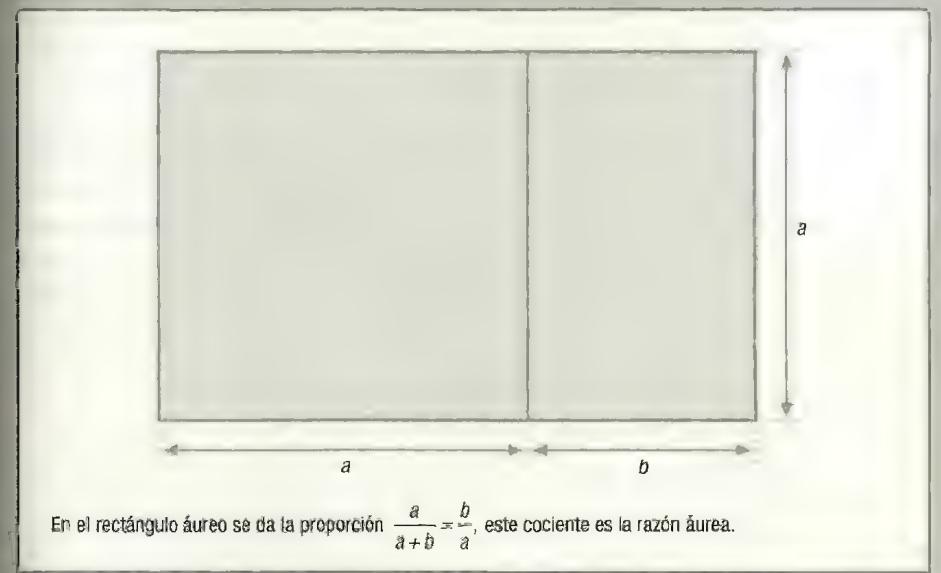
O, lo que es lo mismo:

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

La solución positiva es:

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Esta es la famosa **razón áurea**, la que existe entre la altura y la base del rectángulo de la figura, y que fue considerada por los romanos como la proporción más armónica posible. En el contexto del teorema de KAM, aquella órbita cuyo periodo esté en proporción áurea con el periodo de la fuerza perturbadora será la última en desestabilizarse.



Uno se queda impresionado por la complejidad de esta figura, que no intento siquiera dibujar. Nada es más apropiado para dar una idea de la complejidad del problema de los tres cuerpos.

HENRI POINCARÉ

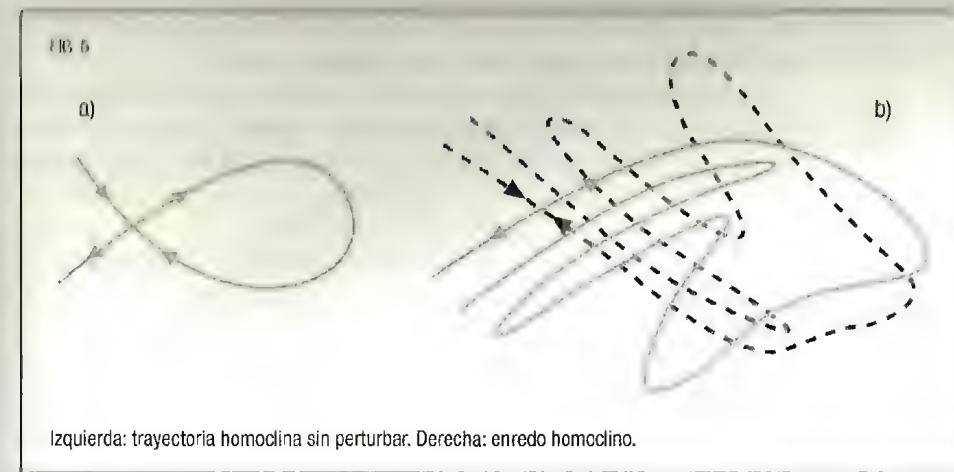
Poincaré presentó a concurso una memoria de cerca de trescientas páginas sobre el problema de los tres cuerpos. El fondo del asunto era la estabilidad del sistema solar como un todo. Para ilustrar sus nuevos métodos y herramientas, Poincaré se centró en una versión restringida del problema de los tres cuerpos.

La memoria de Poincaré era de tal complejidad y extensión que ni siquiera el jurado, formado por grandes matemáticos como Mittag-Leffler, Charles Hermite y Karl Weierstrass, la pudo entender en todos sus detalles en una primera lectura. El premio llevaba aparejada la publicación del ensayo ganador y Mittag-Leffler encargó a un joven matemático sueco, Lars Edvard Phragmén, la preparación del trabajo de Poincaré para su edición. Poincaré y Phragmén se cartearon con regularidad para depurar la memoria y aclarar los muchos puntos oscuros. Cuando ya estaba todo casi listo para su publicación, Phragmén descubrió un razonamiento que no le parecía completo. Tenía que ver con la estabilidad de las órbitas homoclinas.

Las órbitas o trayectorias homoclinas son trayectorias especiales que unen un punto de equilibrio consigo mismo. La figura 5a muestra un ejemplo.

Si la trayectoria une dos puntos de equilibrio distintos se denomina heteroclinia. En la figura 2 (pág. 117), en la que hemos representado el espacio de las fases de un péndulo sin rozamiento, aparecen dos trayectorias heteroclinas, que unen los equilibrios en los que la velocidad es cero y el ángulo  $\pi$  o  $-\pi$ . Estas trayectorias son especiales porque se tarda un tiempo infinito en recorrerlas. En efecto, a medida que nos acercamos

ya comentamos en el primer capítulo que el rey Oscar II de Suecia convocó un concurso matemático por su 60.<sup>o</sup> cumpleaños, que tuvo lugar en enero de 1889. El premio estaba dotado con una medalla de oro y 2500 coronas suecas, una cantidad nada despreciable para la época. Al premio optaron varios de los grandes matemáticos de entonces y Henri



Izquierda: trayectoria homoclinica sin perturbar. Derecha: enredo homoclinico.

al punto de equilibrio la velocidad tiende a cero, y lo mismo ocurre cuando salimos de él. En una parte de su memoria, Poincaré se interesaba por la estabilidad de las trayectorias homoclinas en el contexto del movimiento planetario: ¿se mantenían si se consideraba la perturbación creada, por ejemplo, por un planeta pequeño?

Poincaré había considerado previamente las trayectorias que entran o salen de un punto de equilibrio. En una homoclinica estas dos curvas son la misma. En un principio, el matemático francés creyó demostrar que las dos curvas seguían siendo la misma ante pequeñas perturbaciones: la homoclinica se mantenía como tal. Pero un comentario de Phragmén le hizo darse cuenta de que estaba equivocado. No tardó en encontrar la verdadera respuesta: las dos curvas no coinciden, sino que se cortan infinitas veces. La figura 5b muestra un esquema de algunos de estos primeros cortes. La parte de la homoclinica perturbada que se acerca al punto de equilibrio se retuerce cortando una y otra vez a la otra curva que llega al equilibrio. Los cortes se producen a distancias cada vez más cortas y la curva se alarga cada vez más en uno y otro sentido, retorciéndose. Por otro lado, lo mismo ocurre con la otra rama, trazada con puntos discontinuos. Esta curva tiene un aspecto similar, es la imagen invertida de la curva

de trazo continuo. También se corta infinitas veces y, para hacerlo, se alarga una y otra vez en un sentido y otro.

Los infinitos cortes sucesivos de las dos ramas en que se ha dividido la antigua homoclinia crean una maraña que estira y estira puntos próximos, plegándolos luego una y otra vez. En palabras de Poincaré:

[...] esta figura está formada por dos curvas y sus intersecciones en número infinito [...] Estas intersecciones crean una especie de enrejado, de tela o malla infinitamente tupida; estas curvas no se cortan nunca consigo mismas, pero deben replegarse sobre sí mismas de manera muy compleja, para volver a cortar una infinidad de veces las fibras de la malla.

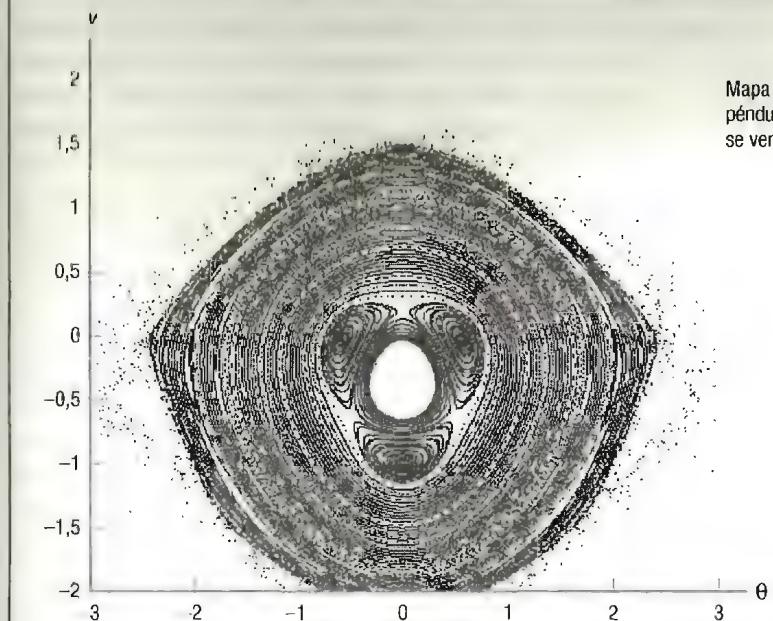
Dentro de un enredo homoclinico como el de la figura 5b, los puntos sucesivos de una trayectoria se van estirando y plegando. Sí, el lector ya lo habrá adivinado, estos son los elementos esenciales del caos: estirar y plegar. El enredo homoclinico es al caos hamiltoniano lo que el atractor extraño al caos en sistemas dissipativos: la estructura geométrica subyacente.

En la figura 6 mostramos el mapa de Poincaré del péndulo perturbado en toda su complejidad: hay islas, curvas KAM (muy poco perturbadas) y zonas caóticas, correspondientes a las heteroclinas perturbadas. La zona caótica es más notable en la parte exterior y se manifiesta en puntos dispersos. Estos puntos corresponden a una trayectoria que vaga entre las cercanías de los puntos de equilibrio inestable iniciales, donde la velocidad es cero y el ángulo  $\pi$  o  $-\pi$ . Esta figura también presenta otra de las características del caos, la autosimilaridad. Las islas de las trayectorias resonantes son similares al mapa sin perturbar inicial, y en su interior se desarrollan otras islas y aparecen nuevas trayectorias heteroclinas. Al ir aumentando la intensidad de la perturbación, estas heteroclinas se desestabilizan a su vez, dando lugar a más caos.

Cuando Poincaré comunicó por carta a Mittag-Leffler que había descubierto un error en la memoria original presentada para el premio del rey Óscar II, y que quería corregirlo antes de que se

FIG. 6

Mapa de Poincaré de un péndulo forzado. En él se ven zonas caóticas.



publicara, ya era demasiado tarde. El artículo ya estaba impreso y había empezado a distribuirse. Mittag-Leffler paró la distribución, pero pidió a Poincaré que se hiciera cargo de los costes de reimpresión del artículo corregido. El coste total de la tirada era de 3 500 coronas, mil más de lo que Poincaré había recibido por el premio.

## CAOS CUÁNTICO

La mecánica cuántica es la teoría física del mundo microscópico: las moléculas, los átomos y el núcleo atómico. Fue desarrollada en las primeras décadas del siglo XX por una generación irrepetible de físicos. Una lista no exhaustiva incluye los nombres, ya legendarios, de Planck, Einstein, Bohr, Heisenberg y Schrödinger. La física cuántica se asienta sobre una serie de conceptos que

rompen con la mecánica newtoniana. Entre ellos están la hipótesis cuántica, la dualidad onda-corpúsculo, el principio de incertidumbre y el principio de correspondencia. Como necesitamos de ellos para entender el resto del capítulo, conviene que recordemos, aunque sea brevemente, en qué consisten estos principios.

La *hipótesis cuántica* fue formulada por el físico alemán Max Planck a finales del año 1900. Según esta, la energía de un sistema mecánico oscilante solo puede tener un conjunto discreto de valores, múltiplos de una cantidad mínima, el cuantito, de valor  $E = \hbar v$ , donde  $v$  es la frecuencia de oscilación, y  $\hbar$ , una constante, la constante de Planck. Esta serie de valores recibe el nombre de *niveles de energía del sistema*. En su formulación inicial, la hipótesis de Planck se aplicaba a sistemas oscilantes con una frecuencia fija: un muelle, por ejemplo. En su formulación final, la mecánica cuántica proporciona las herramientas matemáticas para calcular los niveles de energía permitidos en cualquier sistema mecánico. En el caso de sistemas ligados, por ejemplo, un electrón y un protón que forman un átomo de hidrógeno, estos niveles de energía permitidos forman un conjunto discreto. Heisenberg y Schrödinger, entre 1924 y 1926, propusieron dos formulaciones diferentes, pero equivalentes, de la mecánica cuántica. Ambas formulaciones permiten, en principio, calcular los niveles de energía de un sistema mecánico cualquiera.

En la figura 2 habíamos dibujado el espacio de las fases de un péndulo. Las trayectorias cerradas se corresponden con un movimiento oscilante, de vaivén, del péndulo. A cada una de estas trayectorias le corresponde una energía mecánica definida, suma de la energía cinética y la energía potencial, y esta energía es tanto mayor cuanto más amplias son las oscilaciones. En la física clásica todas las energías son posibles: los valores de energía permitidos forman un continuo. La hipótesis cuántica implica que, en un sistema cuántico, no todas las energías son posibles, solo lo son un conjunto discreto de ellas. Antes de que Heisenberg y Schrödinger hicieran sus respectivas contribuciones, el alemán Arnold Sommerfeld dio una regla de cuantificación que permitía calcular los niveles de energía de ciertos sistemas sim-

plios, como el péndulo. La regla de Sommerfeld suponía que la longitud total de las trayectorias admitidas en el espacio de las fases debía ser un múltiplo de la constante de Planck. Esta regla permitía calcular con éxito los niveles de energía del oscilador armónico de Planck y del átomo de hidrógeno, por ejemplo.

La *dualidad onda-corpúsculo* fue intuida por Einstein, en primer lugar, y explotada en profundidad por Louis de Broglie y Erwin Schrödinger. Según De Broglie, toda partícula cuántica lleva asociada una onda cuya longitud de onda es:

$$\lambda = \frac{\hbar}{mv}.$$

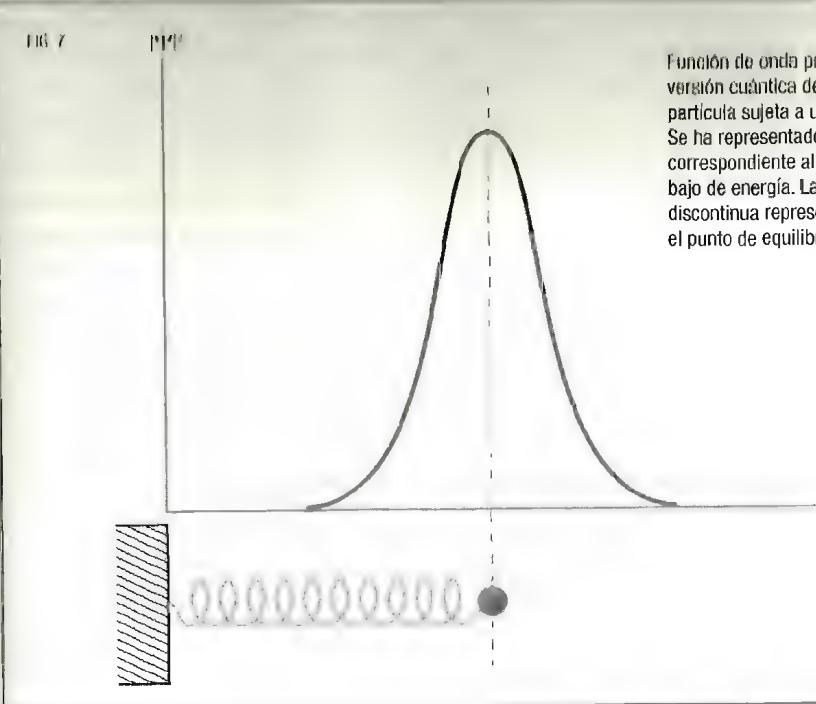
La masa de la partícula está representada por  $m$ , y  $v$  es su velocidad. El producto  $mv$  es la cantidad de movimiento,  $p$ , de la partícula. En la formulación de Schrödinger de la mecánica cuántica, conocida como *mecánica ondulatoria*, toda partícula lleva asociada una función  $\Psi(x, y, z)$ , la función de onda, cuyo cuadrado da la probabilidad de encontrar a la partícula en un punto determinado del espacio. Schrödinger dedujo una ecuación, que lleva su nombre, cuya resolución proporciona la función  $\Psi(x, y, z)$ . En la figura 7 hemos representado el cuadrado de la función de onda para una partícula sometida a una fuerza análoga a la de un muelle clásico en el estado más bajo de energía. Desde una perspectiva clásica, la partícula ejecutaría un movimiento oscilatorio alrededor del punto de equilibrio (marcado en la figura con la línea vertical discontinua). Desde una perspectiva cuántica, la función de onda nos da la probabilidad de encontrar la partícula en una zona del espacio. La función es máxima en el punto de equilibrio, lo que significa que es ahí donde es más probable encontrar la partícula. A medida que nos alejamos del equilibrio la probabilidad disminuye, y es prácticamente cero para puntos alejados.

El comportamiento de una pequeña partícula, como un electrón en un átomo, se parece más al de una onda en la superficie de un lago que a la traza que deja un bolígrafo sobre una hoja de papel. Este tipo de movimiento ondulatorio es el que describe

también fenómenos como la propagación de la luz o el sonido en todo tipo de medios. Estas ondas son la solución de ecuaciones matemáticamente similares a la de Schrödinger, cuyas soluciones suelen tener un aspecto suave y continuo. Las partículas cuánticas comparten así propiedades fundamentales de las ondas clásicas. En particular, cuando dos ondas se superponen se producen interferencias: los máximos se refuerzan y los mínimos y máximos se cancelan. El fenómeno se puede observar, por ejemplo, si tiramos simultáneamente dos piedras a un lago: en la zona donde las dos ondas coinciden se produce un patrón de interferencias característico. La interferencia de las ondas de materia es uno de los fenómenos cuánticos más notables y será un punto importante en nuestra discusión del caos cuántico.

Un átomo tiene ciertas similitudes con un sistema planetario. En el átomo de hidrógeno un electrón está sometido a la fuerza eléctrica atractiva del núcleo, que consiste en un solo protón. La fuerza eléctrica, que sigue la ley de Coulomb, tiene la misma forma que la atracción gravitatoria: su intensidad varía como el inverso de la distancia al cuadrado. En el caso de un cuerpo celeste que orbite alrededor del Sol se pueden distinguir dos tipos de trayectorias. Por un lado están las trayectorias cerradas, como las de los planetas. Estas ocupan una región determinada del espacio, de la que el planeta no sale nunca, y son órbitas elípticas. Pero existen otras trayectorias posibles en las que el cuerpo viene de muy lejos, pasa cerca del Sol solo una vez y luego se aleja indefinidamente. Estas trayectorias son hipérbolas y las describen algunos cometas. En un diagrama en el espacio de las fases, las órbitas cerradas tienen un aspecto similar a las trayectorias interiores de la figura 2, mientras que las órbitas abiertas, hiperbólicas, presentan un aspecto semejante al de las trayectorias externas a las heteroclinas de la misma figura.

En el caso del átomo de hidrógeno, el electrón también puede hallarse en dos tipos de estados. Hay estados ligados, los que corresponderían a las órbitas elípticas clásicas, y estados no ligados, en los que el electrón no está preso y puede abandonar el átomo. Para que los estados ligados sean estacionarios, la función de onda de Schrödinger debe ser una onda estacionaria, si-



Funció n de onda para la versió n cuántica de una partícula sujeta a un muelle. Se ha representado la función correspondiente al nivel más bajo de energía. La línea discontinua representa el punto de equilibrio.

milar a las ondas que se producen en las cuerdas de una guitarra. En una onda viajera los máximos y mínimos van cambiando de posición a medida que la onda se propaga. En una onda estacionaria los nodos (puntos donde la onda se anula) y los vientos (puntos donde las oscilaciones alcanzan mayor amplitud) ocupan siempre la misma posición. En los sistemas ligados ello implica ciertas restricciones sobre la forma de la onda, que solo se cumplen para algunos valores de la energía. El conjunto de estados ligados es, por lo tanto, un conjunto discreto, al que corresponde un conjunto discreto de niveles de energía. Los estados no ligados vienen representados por ondas viajeras, que pueden abandonar el átomo, y no tienen ninguna restricción, por lo que los valores posibles de la energía forman un continuo.

El principio de incertidumbre o de indeterminación fue formulado por Heisenberg en 1927, año en el que se encontraba

en Copenhague trabajando estrechamente con Niels Bohr. El principio de indeterminación se enuncia así: la precisión  $\Delta x$  con la que se puede medir la posición  $x$  de una partícula y la precisión  $\Delta p$  con la que se puede medir su cantidad de movimiento  $p$  no son independientes, sino que deben cumplir la siguiente desigualdad:

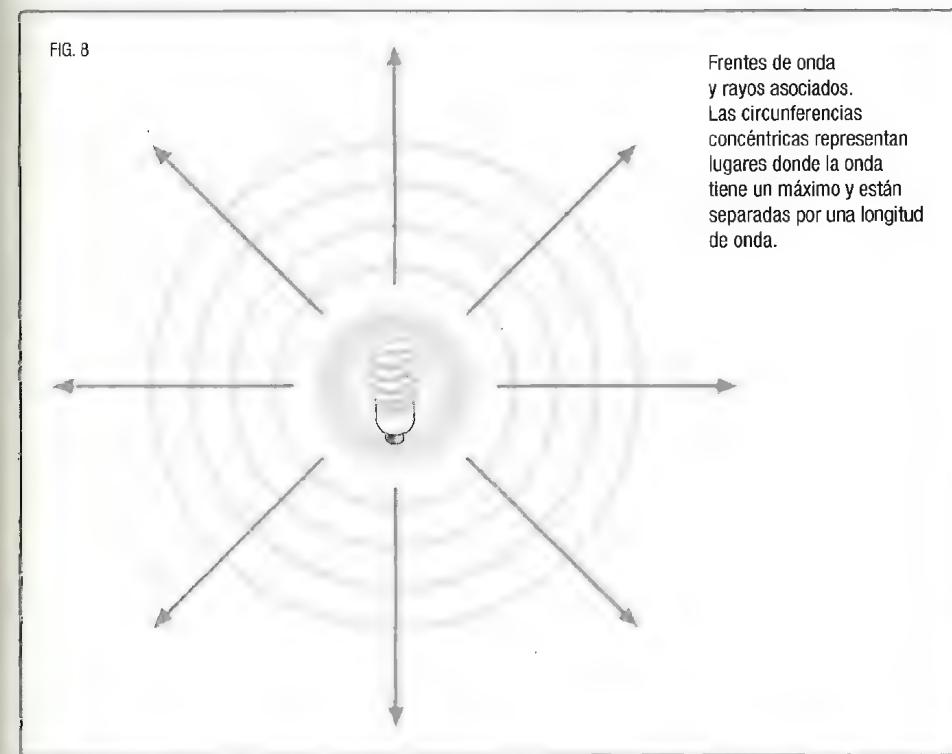
$$\Delta p \Delta x \geq \frac{h}{4\pi}.$$

La consecuencia de ello es que no podemos determinar a la vez la posición y la cantidad de movimiento de una partícula con absoluta precisión. Si conocemos exactamente su posición no hay incertidumbre en las coordenadas espaciales de la partícula y  $\Delta x$  será cero. La desigualdad obliga entonces a que  $\Delta p$  sea infinita, por lo que nuestra indeterminación sobre la cantidad de movimiento será total y esta podrá tomar cualquier valor. Nada sabemos sobre la cantidad de movimiento. Igualmente, si conocemos con total precisión la cantidad de movimiento de una partícula,  $\Delta p$  será cero y  $\Delta x$  infinito, con lo que la partícula puede estar en cualquier lugar del espacio. Como la cantidad de movimiento de una partícula es igual a la masa por su velocidad, lo que decimos de la primera se aplica también a la segunda: no podemos conocer simultáneamente con toda precisión la posición y la velocidad de una partícula. Con ello, la mecánica cuántica despoja de sentido al concepto de trayectoria de un cuerpo, ya que si medimos la posición de una partícula en un instante dado, al no saber cuál es su velocidad, será imposible determinar dónde se encontrará en el instante siguiente. De nuevo la figura 2 nos sirve de ejemplo para ilustrar este concepto. En física cuántica el diagrama de fases de la figura 2 no tiene sentido, ya que en él representamos, en cada instante de tiempo, la posición y la velocidad del péndulo.

En este rápido repaso a la física cuántica, nos queda hablar del *principio de correspondencia*. Enunciado por Niels Bohr en torno a 1918, sirvió de guía en la elaboración de la mecánica cuántica. Según este principio, los resultados obtenidos por la

mecánica cuántica deben coincidir con los de la física clásica si hacemos tender a cero la constante de Planck. Otra forma de verlo, si nos fijamos en la relación entre longitud de onda y cantidad de movimiento de De Broglie, es decir que cuando la longitud de onda de la onda asociada sea pequeña, comparada con las dimensiones físicas del sistema, la partícula debe comportarse clásicamente, ya que los efectos ondulatorios no serán notables.

El principio de correspondencia recuerda a la relación que existe en óptica entre las ondas de luz y los rayos asociados. La luz es un fenómeno ondulatorio y su propagación viene descrita por frentes de onda que marcan los máximos o mínimos de la onda. A una sucesión de frentes de onda le podemos asociar un conjunto de rayos si trazamos líneas perpendiculares a los frentes en cada punto. En la figura 8 se muestra un



ejemplo en el que tenemos una onda que parte de un punto: los frentes de onda son esféricos y los rayos asociados parten radialmente. Cuando no hay fenómenos de interferencia, los rayos proporcionan una información completa de la dirección de propagación de la onda y basta con trazar los rayos para describir los fenómenos ópticos. Esto es lo que hace la óptica geométrica, que es la base del diseño de diversos aparatos ópticos como prismáticos, telescopios, etcétera. Pero si las ondas interfluyen, los rayos no proporcionan toda la información, es necesario saber si la onda se encuentra en un máximo o en un mínimo para conocer el resultado de la interferencia: la descripción de la onda completa, gracias a los frentes de onda, es ineludible.

La función de ondas de Schrödinger contiene toda la información que la mecánica cuántica puede darnos de una partícula. Cuando el movimiento de la partícula es tal que su longitud de onda es pequeña comparada con las dimensiones del sistema del que forma parte, basta trazar los rayos perpendiculares a los frentes de onda para tener una descripción completa del movimiento. Estos rayos representan la trayectoria clásica de la partícula y, según el principio de correspondencia, deben ser calculables a partir de las leyes de la mecánica clásica.

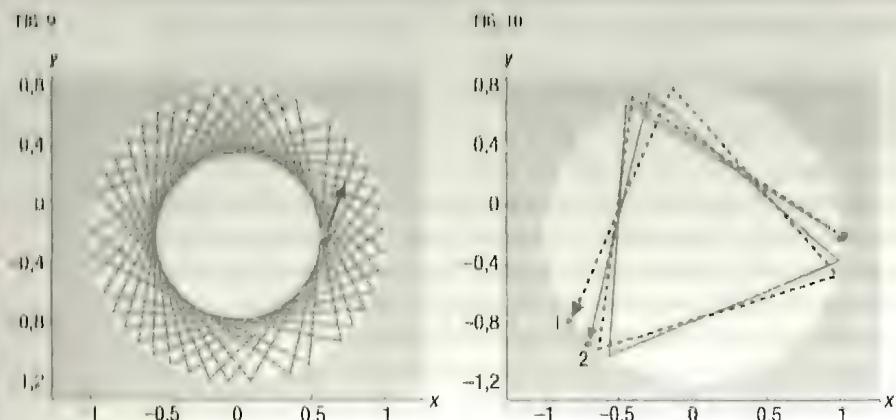
En lo que al caos determinista se refiere, no cabe esperar en el mundo cuántico el comportamiento que hemos encontrado en los sistemas clásicos. La razón está en el principio de incertidumbre. La noción de trayectoria de una partícula carece de sentido en el mundo cuántico y, por tanto, tampoco se puede dar la sensibilidad a las condiciones iniciales, una de las señas de identidad del caos determinista. ¿Cómo se reconcilia el aspecto extremadamente irregular de las trayectorias caóticas clásicas con las características suaves de las ondas propias de la escala atómica? ¿Existe el caos determinista en el mundo cuántico? Los sistemas cuánticos no presentan un comportamiento caótico al modo clásico, pero se usa la expresión *caos cuántico* para designar las características de aquellos sistemas cuánticos cuyo sistema clásico asociado, aquel que les asignaría el principio de correspondencia, es caótico. Algunos, como

el físico británico Michael Berry, prefieren usar *caología cuántica* en lugar de *caos cuántico*.

### El billar cuántico

Un billar es un buen ejemplo para ilustrar las diferencias entre los comportamientos clásico y cuántico de un sistema caótico. Imaginemos una partícula obligada a moverse en una superficie bidimensional cerrada, como una bola en un billar. Pero, en lugar de un billar rectangular, empecemos por un billar un poco raro, uno cuyas paredes sean una circunferencia, un billar circular. Supondremos también que nuestra bola de billar no sufre rozamiento con la superficie por la que se mueve y que las paredes son totalmente rígidas, por lo que no se pierde energía en cada choque. Se trata, pues, de un sistema hamiltoniano, en el que la energía de la bola se conserva.

Consideremos primero que la bola se mueve según las leyes de la mecánica clásica. Una vez que le demos impulso, rebotará una y otra vez con las paredes sin perder nunca la energía inicial que le hemos dado. Cada vez que la bola choca con la pared se refleja siguiendo las leyes de la mecánica de Newton, cuya aplicación, en este caso, conduce a una regla simple: el ángulo de incidencia es igual al de reflexión. La figura 9 muestra una trayectoria típica de una bola en este billar circular. La trayectoria no se repite nunca, pero no es caótica, se trata de lo que llamamos una *órbita cuasi periódica*. Como el contorno es una circunferencia, cada vez que la partícula rebota «siente» una fuerza que está dirigida hacia el centro de la circunferencia, una fuerza central. Por ello, además de la energía también se conserva el momento angular, y la trayectoria está perfectamente determinada conocidos la posición y la velocidad iniciales. Se trata de un sistema integrable. Además, hay toda una zona, un círculo interior, que la partícula no visita nunca. Este sistema no presenta sensibilidad a las condiciones iniciales, como muestra la figura 10, en la que hemos representado dos trayectorias que parten del mismo punto pero con ángulos ligeramente diferentes. Aunque las trayectorias se



La gráfica de la figura 9 muestra la trayectoria clásica de una partícula en un billar circular. El punto marca la posición inicial. En la figura 10 se han representado dos trayectorias que parten de la misma posición, marcando con un punto, pero con ángulos ligeramente distintos. Tras cuatro reflexiones se llega a los puntos marcados con los números 1 y 2.



Cuadrado de la función de onda para el nivel de energía número 95 del billar circular. Las zonas más oscuras representan poca probabilidad de encontrar a la partícula, las zonas claras son las más probables.

ván separando, tras cuatro iteraciones siguen relativamente cerca la una de la otra.

Según la teoría cuántica, la ecuación de ondas de Schrödinger proporciona los posibles estados cuánticos. Como la bola está obligada a moverse en una zona finita del espacio, se trata de un sistema ligado y el conjunto de estados cuánticos es discreto. El cuadrado de la función de ondas representa la probabilidad de encontrar la partícula en un punto dado del espacio. A cada función de onda y, por tanto, a cada estado cuántico, le corresponde un nivel de energía determinado. La figura 11 muestra el cuadrado de la función de onda del billar circular de la figura 9. Se muestra la función que corresponde al nivel de energía número 95. Hemos elegido un número tan alto para estar en condiciones en las que el principio de correspondencia sea aplicable, ya que a los niveles más altos les corresponden longitudes de onda cada vez más pequeñas. Vemos que la trayectoria de la figura 9 se corresponde con la probabilidad que refleja la figura 11: la zona cuánticamente poco probable está en la zona en la que clásicamente no hay trayectorias, y la zona más probable cuánticamente coincide con la circunferencia interior, que es tangente a un gran número de trayectorias clásicas.

Cambiemos ahora de billar. En la figura 12 tenemos un billar en forma de estadio. En él hemos representado una trayectoria lo bastante larga como para vislumbrar las características generales del movimiento. El estadio no tiene simetría central y en él no se conserva el momento angular. Es un sistema no integrable: no es posible dar una expresión matemática general para la trayectoria que sigue la bola conociendo su posición y su velocidad iniciales. El aspecto de la trayectoria es ahora mucho más irregular. En realidad, si siguiéramos la trayectoria de la bola durante un gran número de rebotes, veríamos cómo las sucesivas trazas van llenando toda el área disponible, hasta llenarla completamente. Ahora sí hay sensibilidad a las condiciones iniciales. Para comprobarlo, basta fijarse en dos trayectorias como las representadas en la figura 13. Tras cinco reflexiones en la pared, pasan por los puntos 1 y 2, en extremos opuestos del billar. Esta situación difiere claramente de la del billar circular,

Trayectoria clásica de una partícula en un billar con forma de estadio. El punto marca la posición inicial

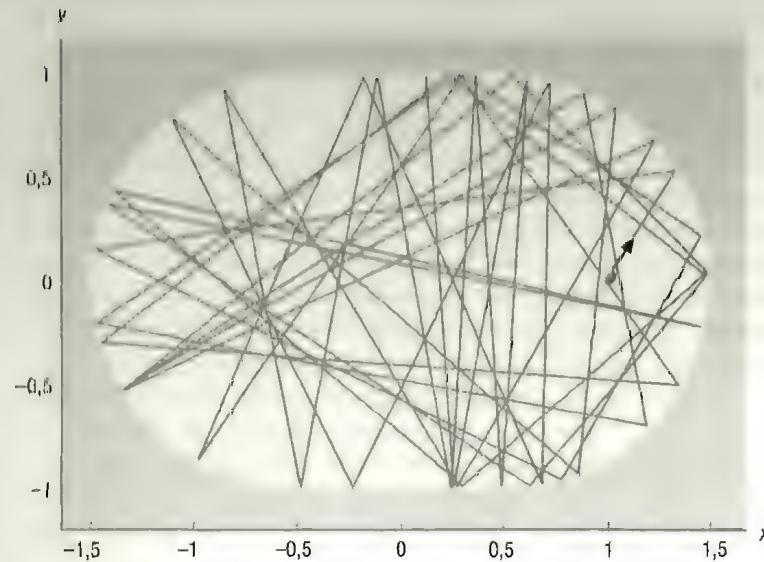
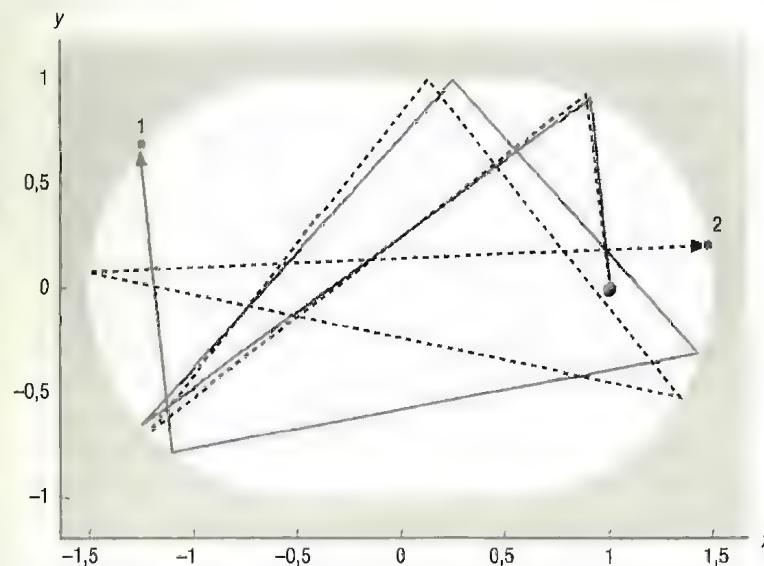


FIG. 13

FIG. 14

Dois trayectorias que parten da mesma posição, mirando com um ponto, però con ángulos ligeramente diferentes. Tras cinco reflexões en alcanzan puntos, marcados con los números 1 y 2, muy distantes.



como se aprecia al compararla con las figuras 9 y 10. El billar de estadio es un sistema caótico.

En la figura 14 se representa el cuadrado de la función de onda para el mismo billar de estadio. De nuevo hemos escogido el nivel 95 de energía. Sorprendentemente, la distribución de probabilidad de hallar la partícula no es uniforme, como sería de esperar considerando el hecho de que las trayectorias clásicas recorren con igual probabilidad toda el área del estadio. Esta circunstancia se explica por el papel que tienen las interferencias entre ondas. En el billar de estadio clásico hay algunas trayectorias periódicas. Por ejemplo, si lanzamos la bola a lo largo de la línea central horizontal rebotará una y otra vez sin salir de la horizontal. También es periódica una órbita que atraviese el centro del semicírculo izquierdo e incida justo en el centro del lado recto superior, ya que al rebotar pasará por el

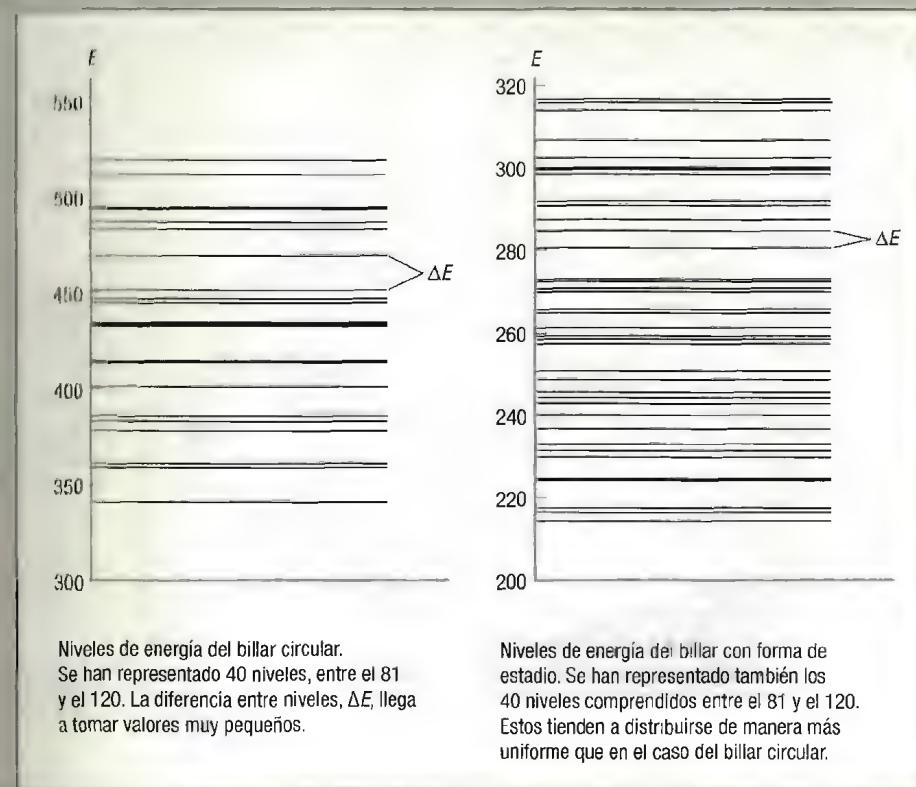
FIG. 14



Cuadrado de la función de onda para el nivel de energía número 95 del billar con forma de estadio. Las trayectorias periódicas subyacentes crean un patrón de interferencia que induce cierto orden en la distribución.

## DISTRIBUCIÓN DE LOS NIVELES DE ENERGÍA EN UN SISTEMA CUÁNTICO CAÓTICO

Una de las propiedades más interesantes del sistema cuántico caótico es la forma de distribución de los niveles de energía en el sistema. Los niveles de energía en un sistema cuántico caótico no tienen una simetría clara, ya que los niveles de energía están dispersos y tienen una distribución más uniforme. En el caso del billar circular, los niveles de energía están dispersos y tienen una distribución más uniforme. Los niveles de energía en el billar con forma de estadio tienen una distribución más uniforme y hay una cierta simetría entre los niveles. Los niveles de energía en el billar con forma de estadio tienden a juntarse cada vez más, mientras que en el billar con forma de estadio hay una cierta «repulsión» entre los niveles. La manera en que los niveles de energía en el billar con forma de estadio tienden a distribuirse se ajusta muy bien a una expresión matemática que dedujo Paul Wigner en el contexto de la física nuclear. Wigner se planteó la pregunta: ¿se cumplen las leyes de la física clásica en el mundo cuántico? Y llegó a la conclusión de que los niveles de energía en el mundo cuántico siguen las leyes de la física clásica.



En el caso del billar con forma de estadio, los niveles de energía están dispersos y tienen una distribución más uniforme. Los niveles de energía en el billar circular tienen una distribución más uniforme y hay una cierta simetría entre los niveles. Los niveles de energía en el billar con forma de estadio tienden a juntarse cada vez más, mientras que en el billar con forma de estadio hay una cierta «repulsión» entre los niveles. La manera en que los niveles de energía en el billar con forma de estadio tienden a distribuirse se ajusta muy bien a una expresión matemática que dedujo Paul Wigner en el contexto de la física nuclear. Wigner se planteó la pregunta: ¿se cumplen las leyes de la física clásica en el mundo cuántico? Y llegó a la conclusión de que los niveles de energía en el mundo cuántico siguen las leyes de la física clásica.

## Degeneración y simetría

La repulsión de los niveles de energía se relaciona con las simetrías. En el billar circular o en el átomo de hidrógeno, la fuerza tiene simetría de revolución, porque es la misma para todos los puntos que están a la misma distancia del centro del sistema. Esto hace que varias funciones de onda tengan asociado el mismo valor de la energía. En el argot cuántico se dice que son estados cuánticos degenerados. Pero en el billar con forma de estadio, en un átomo de hidrógeno sometido a un campo externo o en una molécula no simétrica, se rompe la degeneración y los niveles de energía tienden a separarse. Los sistemas cuánticos cuyo sistema clásico asociado es caótico siguen la ley de Wigner.



Eugene Paul Wigner recibió el premio Nobel de Física en 1963. En la fotografía aparece contemplando el diploma acreditativo de tan preciado galardón.

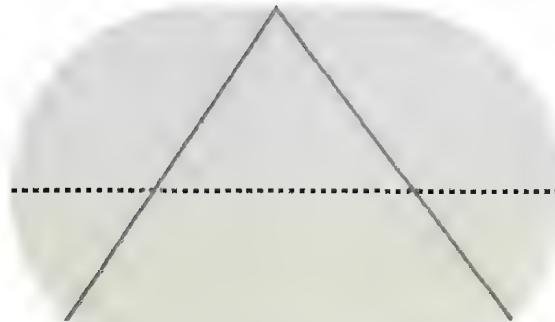
centro del semicírculo derecho y se reflejará por la misma línea que llevaba. Ambas posibilidades están trazadas en la figura 15.

Las órbitas periódicas en el billar de estadio clásico son muy excepcionales. De hecho, si lanzamos la bola al azar, la probabilidad de que siga una trayectoria periódica es cero. Sin embargo, las órbitas periódicas son muy relevantes en el billar cuántico. Ello se debe a que las ondas asociadas a las órbitas caóticas interfieren de manera incoherente. Las múltiples reflexiones hacen que máximos y mínimos interfieran aleatoriamente, no dejando un patrón claro. Por el contrario, las ondas asociadas a las órbitas periódicas interfieren siempre de la misma forma, con coherencia, y producen un patrón definido que perdura. El billar cuántico es, así, «menos caótico» que su análogo clásico. Este papel determinante de las órbitas periódicas en el comportamiento de los sistemas cuánticos fue desvelado por Martin Gutzwiller.

Los billares cuánticos pueden parecer sistemas demasiado idealizados como para tener interés práctico, pero lo cierto es que hoy en día se han conseguido realizar en el laboratorio gracias al avance de las técnicas de construcción de microdispositivos.

Es posible construir cavidades microscópicas superficiales donde encerrar la luz. Estos dispositivos se asemejan a láseres bidimensionales y las cavidades se pueden construir con formas

FIG. 15



Dos trayectorias periódicas en el billar con forma de estadio.

muy diversas. Las cavidades con forma de estadio, de dimensiones del orden de 40 micras de largo por 20 de ancho, presentan espectros de emisión que están directamente relacionados con los estados posibles, similares a los calculados para un billar cuántico con la misma forma. Se comprueba que las trayectorias periódicas del billar determinan el espectro. El que se trate de luz y no de partículas es irrelevante, porque la forma de las ondas estacionarias dentro de la cavidad es la misma en ambos casos. También es posible construir trampas para electrones con forma de estadio y los niveles de energía se distribuyen de la manera esperada.

En un átomo de hidrógeno, la fuerza a la que está sometido el electrón depende solo de la distancia al núcleo. Es una situación altamente simétrica y el sistema clásico asociado es integrable y tiene una solución conocida: las órbitas de Kepler. Por lo tanto, se trata de un sistema no caótico. Pero si sometemos el átomo de hidrógeno a un campo eléctrico o a un campo magnético externo, la situación se asemeja a la del péndulo perturbado y el sistema clásico correspondiente se vuelve caótico. Estos sistemas han sido estudiados experimentalmente, y presentan características especiales en la distribución de los niveles de energía, similares a la de los billares cuánticos caóticos.

Pequeñas moléculas como el acetileno tienen decenas de miles de estados cuánticos para nuestro entretenimiento y edificación.

MARTIN GUTZWILLER

## Aplicaciones del caos

Desde la aparición de los primeros estudios sobre el caos determinista, la teoría del caos ha atraído la atención de científicos de todas las disciplinas. ¿Cómo ha influido esta teoría en áreas tan dispares como la ingeniería, la biología, la economía, la química e, incluso, la filosofía?

Si nos asomamos a contemplar un río desde un puente ubicado en su curso alto, cuando la corriente baja con fuerza observaremos que se forman remolinos en la estela de los pilares del puente. El movimiento de los remolinos tiene el mismo poder hipnótico que el fuego en una chimenea: es siempre el mismo y siempre distinto. La estela tiene una estructura a gran escala que se abre a medida que la corriente se aleja del puente. Dentro de la estela se produce una sucesión de torbellinos, más o menos regular dependiendo de la velocidad del agua. Si el río baja muy rápido, las estelas de los pilares llegan a ser muy turbulentas y los detalles nunca se repiten. Se pueden observar entonces torbellinos de todos los tamaños: desde algunos que tienen las dimensiones del pilar del puente hasta otros muy pequeños. Se forman debido a la presencia del puente y a la viscosidad del agua. La viscosidad es la resistencia que presentan los fluidos al movimiento. Cuando el agua pasa por debajo del puente, los pilares frenan la que pasa pegada a ellos, mientras que el agua que fluye en el espacio medio entre dos pilares lo hace a gran velocidad. La viscosidad hace que unas capas de fluido vayan frenando a las capas vecinas, transmitiendo la presencia del puente a todo

el flujo. El frenado viscoso induce la formación de los vórtices, del mismo modo que la fricción con el suelo hace girar una pelota cuando la lanzamos, o que un futbolista en carrera cae girando sobre sí mismo cuando un defensa lo agarra del brazo. Las características generales del movimiento turbulento son la formación de torbellinos o vórtices y la irregularidad del movimiento, tanto espacial como temporal.

La turbulencia aparece en multitud de situaciones: en el humo que asciende violentamente por la chimenea de la fábricas, en la estela que dejan en el aire los automóviles, en los chorros de agua que salen de la depuradora de una piscina, etcétera. El que un flujo sea o no turbulento no depende solo de la velocidad del agua. Hacia 1880, el físico inglés Osborne Reynolds estudió el flujo en un tubo cilíndrico de gran longitud. Reynolds descubrió que el hecho de que el flujo fuera o no turbulento dependía no solo de la velocidad del líquido en cuestión, sino también de su viscosidad y del diámetro de la tubería. También comprobó que, en lo que se refiere a la aparición de la turbulencia, duplicar la velocidad tenía el mismo efecto que duplicar el diámetro del tubo o que dividir por dos la viscosidad del líquido. Todo esto queda condensado en un número que hoy en día llamamos *número de Reynolds*,  $Re$ , que viene dado por el siguiente cociente:

$$Re = \frac{\rho U d}{\mu},$$

donde  $\rho$  es la densidad del líquido,  $\mu$  su viscosidad,  $U$  la velocidad del flujo y  $d$  una distancia característica (el diámetro del tubo en el caso estudiado por Reynolds, el diámetro del pilar en el caso de un puente). Flujos que tienen el mismo número de Reynolds son similares, aunque los líquidos o las escalas sean distintos. Si el número de Reynolds es bajo, los flujos son siempre laminares, esto es, el fluido fluye con regularidad, como un río cerca de la desembocadura. Si el número de Reynolds es suficientemente alto, el flujo es turbulento, tanto más cuanto más alto sea el número de Reynolds.

## A MEZCLAR

Una propiedad esencial de la turbulencia desde el punto de vista industrial es su capacidad de mezcla. En un flujo turbulento las distintas partes del fluido se mezclan eficazmente. Este hecho lo comprobamos, por ejemplo, cuando agitamos el café con una cucharilla para disolver el azúcar. Si echáramos el azúcar en el café y no lo agitáramos, tardaría mucho en disolverse. La razón es que la disolución es un proceso que tiene lugar a escala molecular: las moléculas de azúcar se difunden entre las moléculas de agua. La escala de tiempo a la que se da este proceso es proporcional al cuadrado del tamaño del sistema, por ejemplo, la altura de la taza, e inversamente proporcional al coeficiente de difusión. Esto se expresa matemáticamente como  $d^2/D$ , donde  $d$  es la escala espacial, y  $D$ , el coeficiente de difusión. El coeficiente de difusión da idea de la facilidad que tienen las moléculas de la sustancia que se difunde de penetrar entre las moléculas de la sustancia en que se introduce, y suele ser un valor muy pequeño. En el caso del azúcar en el café,  $D \sim 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ , por lo que si tomamos la fórmula anterior para  $d \sim 5 \text{ cm}$ , obtenemos un valor cercano a una hora. En conclusión, la difusión por sí sola es un proceso muy lento para obtener una mezcla homogénea. ¿Cómo lo remediamos? Removiendo el café con la cucharilla. Al hacerlo generamos un flujo turbulento que pone en contacto el azúcar con todo el café de la taza y los mezcla más eficazmente.

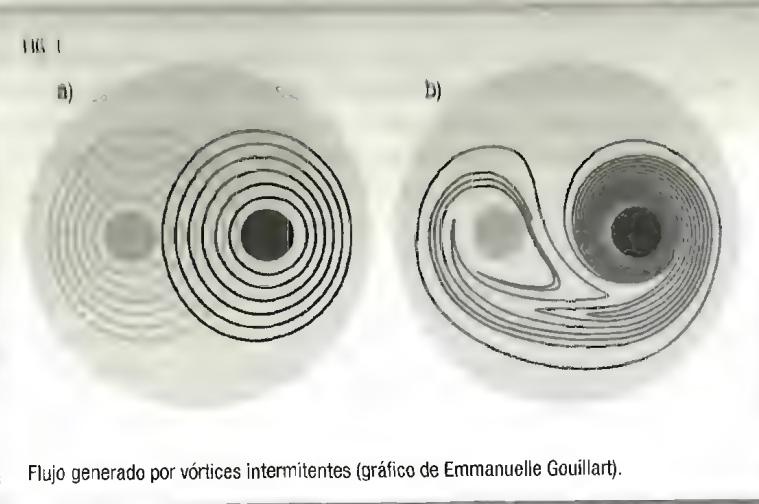
El matemático ruso Andrei Kolmogorov propuso, en los años cuarenta del siglo pasado, una teoría de la turbulencia según la cual la energía asociada al movimiento turbulento pasaba de los torbellinos de gran escala a los más pequeños. El mecanismo físico por el que se produce esta *cascada de Kolmogorov*, como se le conoce, es el estiramiento que el propio flujo produce en los torbellinos grandes. Un torbellino es una estructura tridimensional, como la que observamos en el desagüe del fregadero. Al ser arrastrado por el movimiento del fluido en un flujo turbulento, el torbellino se estira en la dirección de su eje y se encoge en el plano perpendicular a él. Al encogerse se va acelerando, como un

patillador cuando pliega los brazos, y eventualmente se rompe en vueltos torbellinos más pequeños y más rápidos. El resultado final de todo este proceso es una transferencia de energía de los torbellinos grandes a los torbellinos pequeños. Kolmogorov evaluó cuantitativamente este proceso y obtuvo una expresión matemática para la densidad de energía cinética que cabía esperar a cada escala, es decir, la forma en que se reparte la energía total que transporta el flujo entre los torbellinos existentes, atendiendo a su tamaño. Cuando los torbellinos alcanzan un tamaño suficientemente pequeño, la viscosidad los frena y los destruye. La energía, que es inyectada a gran escala en las grandes estructuras, es disipada en las pequeñas escalas. La turbulencia es eficaz a la hora de mezclar porque los grandes torbellinos van dando lugar a otros de menor tamaño cada vez. A las escalas más pequeñas actúa eficazmente la difusión, culminando el proceso de mezcla.

En las últimas décadas se han desarrollado nuevas técnicas de manipulación de líquidos a escala muy reducida, que se conocen con el nombre genérico de *microfluídica*. Este término engloba los flujos que se producen en microdispositivos, fabricados gracias a las técnicas de la microelectrónica. Las aplicaciones típicas de la microfluídica son el análisis químico de pequeñas muestras de materiales, la clasificación de partículas o macromoléculas y la preparación de productos farmacéuticos a partir de cantidades ínfimas de principio activo.

Un problema que aparece con frecuencia en microfluídica es el de la mezcla. Por ejemplo, puede ser necesario mezclar la sustancia que se quiere analizar con un determinado reactivo. Pero la escala típica de un dispositivo microfluídico es del orden de una micra, por lo que el número de Reynolds es siempre muy pequeño. Por tanto, todos los flujos microfluídicos son laminares y la táctica de remover el fluido con una cucharilla microscópica no es efectiva, ya que no se produce nunca un flujo turbulento.

El caos determinista ha venido a resolver este problema. Se trata de inducir en el microdispositivo un flujo que, aunque laminar, sea caótico. El sencillo dispositivo de la figura 1, ideado por Hassan Aref, permite demostrar la capacidad de mezcla de los sistemas caóticos. El dispositivo consiste en una cavidad



Flujo generado por vórtices intermitentes (gráfico de Emmanuelle Gouillart).

cilíndrica llena de líquido y en la que se encuentran dos barras que pueden girar sobre su eje dispuestas como se muestra en la figura. Cada barra por separado generaría un flujo en forma de vórtice cuyas líneas se muestran en la figura 1a. Para generar un flujo caótico, las dos barras se mueven alternativamente, primero una, luego la otra, y así sucesivamente. El resultado es que las capas de fluido se estiran y pliegan, dando lugar a un movimiento caótico. La capacidad de mezcla de este dispositivo se ilustra en la figura 1b, donde se muestra cómo se ha dispersado una gota de tinta después de varias rotaciones alternativas de las barras.

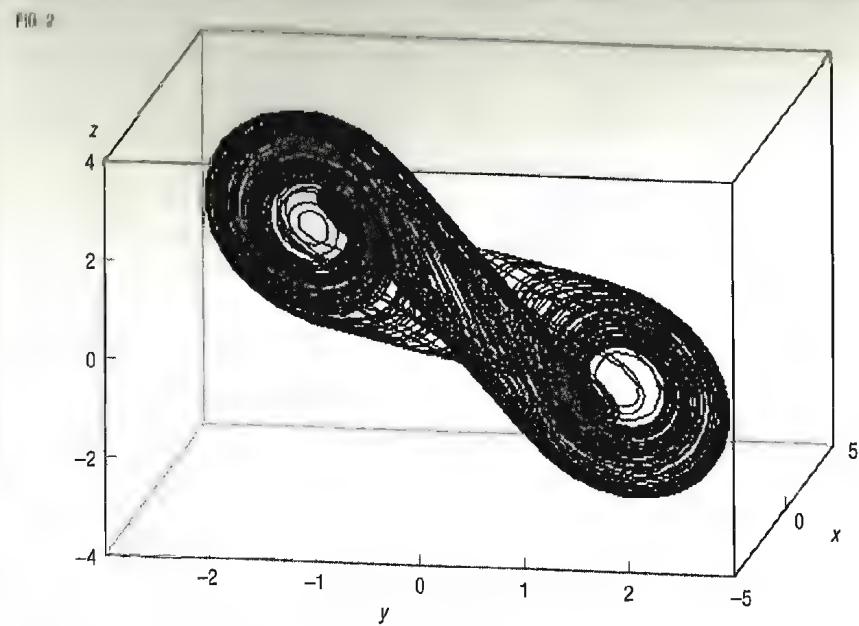
En los dispositivos microfluídicos los ingenieros diseñan una serie de acanaladuras en forma de zigzag que obligan al líquido a estirarse y plegarse —la receta del caos— a medida que avanza. De esta forma se consigue un mezclado eficaz de las sustancias que entran en el dispositivo, aunque el flujo sea siempre laminar.

## EL CAOS Y LOS CIRCUITOS ELECTRÓNICOS

La teoría del caos determinista llegó a la electrónica de la mano del ingeniero electrónico Leon Chua. Nacido en Filipinas en el

seño de una familia de origen chino, Chua estudió en Estados Unidos, donde obtuvo un máster en ingeniería eléctrica en el Instituto Tecnológico de Massachusetts. En 1983 diseñó un circuito electrónico que exhibía un comportamiento caótico. El circuito consistía esencialmente en un oscilador eléctrico acoplado a una resistencia no lineal. Un oscilador eléctrico es un circuito en el que la corriente eléctrica circula alternativamente en uno y otro sentido a una frecuencia determinada. El circuito oscilante más sencillo se compone de un condensador y una inductancia. En el condensador se acumula carga eléctrica. En la inductancia el cable se enrolla sobre sí mismo un gran número de veces, formando una bobina, lo que produce en su interior un campo magnético al circular la corriente. Al poner en marcha un circuito formado por un condensador y una inductancia, la corriente circula alternativamente del condensador a la bobina y de la bobina al condensador. La frecuencia de la oscilación viene determinada por las características físicas del condensador y de la bobina. El otro elemento del circuito de Chua era una resistencia no lineal. En una resistencia estándar la diferencia de potencial eléctrico entre sus extremos es proporcional a la corriente que circula por ella, lo que corresponde a un comportamiento lineal. En una resistencia no lineal la diferencia de potencial no es proporcional a la corriente.

Con la adecuada elección de los parámetros de los elementos que componían el circuito de Chua, la tensión eléctrica entre dos puntos iniciaba oscilaciones erráticas de manera espontánea. Con la ayuda de un osciloscopio, un aparato que permite visualizar en una pantalla cómo varía en el tiempo una señal eléctrica, Chua podía visualizar el atractor correspondiente a la variación caótica de las tensiones dentro del circuito. La figura 2 muestra este atractor, obtenido aquí mediante una simulación por ordenador. Su estructura recuerda a la del atractor de Lorenz. Las dos hojas en que se divide son conocidas en el mundo de la electrónica por la expresión en inglés *double-scroll*, que podría traducirse como «doble rollo». En los años ochenta, esta figura se convirtió en un símbolo de la electrónica no lineal, en la que se hace un uso profuso de elementos circuitales no li-



El atractor de Chua.

neales. El circuito de Chua abrió todo un campo de la electrónica moderna, que, a partir de entonces, incorporó de manera natural las técnicas matemáticas de los sistemas dinámicos no lineales.

## CAOS EN BIOLOGÍA

En el segundo capítulo vimos que uno de los sistemas dinámicos por excelencia estaba directamente relacionado con la biología a través de la dinámica de poblaciones: el mapa logístico, que Robert May estudió en profundidad. Desde ese primer encuentro entre biología y caos, los biólogos se fueron interesando cada vez más por el caos y los sistemas no lineales. Ese interés ha dado sus frutos en diversas áreas y ha estimulado el

## Intento de modelizar matemáticamente algunos procesos biológicos.

Dos órganos del ser humano han recibido especial atención por los expertos en caos: el cerebro y el corazón. En ambos casos es posible registrar una serie temporal de datos a partir de las señales eléctricas generadas por el cuerpo, lo que se consigue mediante electroencefalogramas y electrocardiogramas. La pregunta en ambos casos es la misma: ¿es posible atribuir el origen de estas señales a un sistema dinámico con pocos grados de libertad?

El caso de los electroencefalogramas es especialmente complejo. El cerebro no está sincronizado como un todo y funciona de manera modular, por lo que no se trata solo de la evolución temporal de una señal eléctrica, sino también de su distribución espacial. El impulso inicial en el estudio del cerebro como un sistema dinámico ha llevado a nuevas ideas que se adentran en los sistemas complejos y se alejan del tema de este libro. Más éxito han tenido, desde el punto de vista de la teoría del caos determinista, los estudios sobre el comportamiento de una sola neurona. Es posible medir la actividad de una neurona registrando el potencial de membrana del axón. El axón es la prolongación larga de las neuronas, que conduce el impulso nervioso, y el potencial de membrana es el potencial eléctrico que existe entre los dos lados, interior y exterior, de la membrana. Cuando una neurona es excitada, esa excitación se propaga como una señal eléctrica que modifica el potencial de membrana a lo largo del axón. Un filtrado adecuado de la señal permite determinar el momento en que la neurona se excita, y obtener la secuencia temporal de los instantes en que se producen las excitaciones. De esta forma se han registrado comportamientos caóticos en algunas neuronas que ejercen funciones de marcapasos o que tienen un papel determinado en ciertas zonas funcionales, como, por ejemplo, las neuronas de los llamados *generadores centrales de patrones*, que son redes neuronales que generan conductas motoras rítmicas, como la respiración o la locomoción. Un comportamiento caótico determinista puede ser el régimen normal de funcionamiento de estas neuronas. El estudio de la señal ge-

## CAOS EN QUÍMICA: LA REACCIÓN BZ

Uno de los campos donde el caos ha tenido una influencia más profunda es dentro de la química. Una reacción química se expresa por una expresión de la forma  $A+B \rightleftharpoons C+D$ , donde  $A$  y  $B$  representan los reactivos y  $C$  y  $D$  los productos. La doble flecha expresa el hecho de que toda reacción química se puede producir en los dos sentidos, y la proporción de reactivos y productos que tengamos en una situación determinada viene dada por las leyes del equilibrio químico. Lo que nos interesa aquí es que cualquier reacción química puede contemplarse como un sistema dinámico. En efecto, si ponemos en contacto dos reactivos,  $A$  y  $B$ , sus concentraciones irán disminuyendo a medida que la reacción tiene lugar, mientras que las de los productos,  $C$  y  $D$ , irán creciendo. Las leyes de la química permiten expresar la evolución temporal de las concentraciones de reactivos y productos como un sistema de ecuaciones diferenciales. La situación más conocida es aquella en la que el equilibrio está muy desplazado hacia la derecha. Por ejemplo, en una combustión se mezcla el combustible con oxígeno y se produce agua y dióxido de carbono. Esta reacción tiene lugar con enorme rapidez, a veces de manera explosiva, por lo que, vista como un sistema dinámico, no tiene mayor interés: pronto se alcanza un estado estacionario en el que los reactivos se han agotado y la mezcla de productos es inerte. Pero hay situaciones más complejas desde el punto de vista dinámico. El ejemplo más conocido es la reacción de Belousov-Zhabotinsky.

### El descubrimiento de la reacción BZ

En torno a 1950 el químico ruso Boris Belousov observó, por casualidad, oscilaciones en la reacción de oxidación de ácido cítrico por bromato de potasio catalizada por iones de cerio. Belousov notó que la solución en la que se producía la reacción pasaba de amarilla a incolora sucesivamente con regularidad. Una década después, otro químico de la Unión Soviética, Anatol Zhabotinsky, dedicó su tesis doctoral a estudiar en detalle este fenómeno. Desde entonces esta reacción ha sido objeto de muchos estudios. Dependiendo de las condiciones particulares en las que se lleve a cabo, se puede observar toda una variedad de fenómenos, desde las oscilaciones originales hasta estructuras espaciales diferenciadas, en las que se alternan colores diferentes, regímenes caóticos tanto temporales como espaciales, etcétera.

Patrones espaciales en la reacción Belousov-Zhabotinsky.



**Si alcanzas el equilibrio en biología es que estás muerto.**

**ARNOLD MANDELL, PSICOLOGA ESTADOUNIDENSE**

forma ha sido posible generar diversos comportamientos dinámicos que no aparecen en la neurona aislada.

En el caso del corazón, los estudios realizados en el marco del caos determinista son más concluyentes. El ritmo cardíaco de un corazón sano tiene siempre un componente caótico, mientras que los ritmos excesivamente regulares están asociados a patologías. La razón de este hecho parece estar en la *robustez* de los regímenes caóticos. Un ritmo estrictamente periódico no es robusto, pequeñas perturbaciones pueden desestabilizarlo. Sin embargo un régimen dinámico caótico bien establecido conlleva un atractor extraño, que es un elemento estructuralmente estable. El régimen caótico soporta pequeñas perturbaciones y permite pequeños ajustes sin salir de él. El ritmo cardíaco muestra la posibilidad de estabilizar un régimen alrededor de una periodicidad aproximada por medio de un régimen caótico. Este es más resistente a los cambios del entorno.

## ¿ES CAÓTICA LA ECONOMÍA?

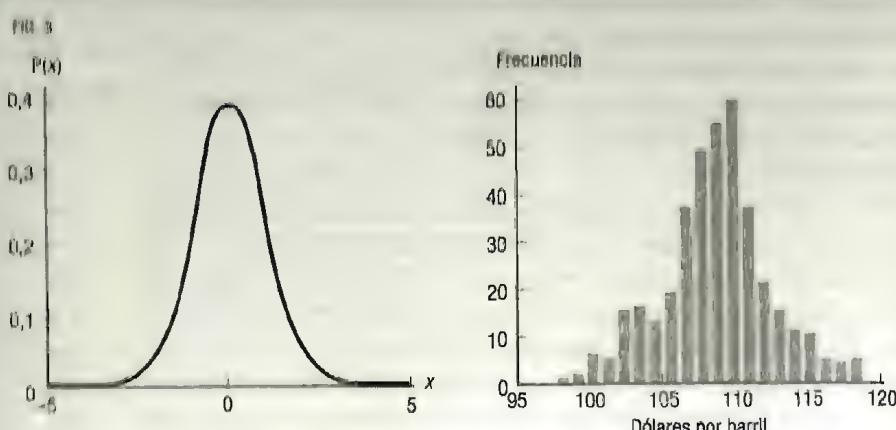
Durante varias décadas del siglo xx las teorías económicas han estado dominadas por el concepto de equilibrio. Supongamos que tenemos dos individuos en disposición de comerciar y que son seres completamente racionales en sus transacciones. Cada uno produce un bien diferente, por ejemplo, uno produce vino y el otro, aceite de oliva. La producción anual de ambos es mayor de lo que consumen y pueden utilizar el excedente para adquirir el producto del otro. Pues bien, según la teoría del equilibrio, el que produce vino venderá su excedente al otro a cambio de aceite hasta que lo adquirido iguale en valor a lo vendido. A partir de ahí, no hay más interés en vender y se alcanza un punto de equilibrio. Si las condiciones no cambian, los productores inter-

nos no pueden ayudar a comprender el efecto de drogas o estímulos. También se han realizado estudios en los que una neurona es integrada en un circuito electrónico externo. De esa

cambiarán cada año las mismas cantidades de productos para satisfacer así sus necesidades.

En esta teoría del equilibrio es relativamente fácil generalizar la situación a muchos agentes. El precio de un determinado bien queda determinado por el equilibrio entre la oferta y la demanda dentro del sistema. Las desviaciones del equilibrio se tratan linealmente. Si por alguna razón, por ejemplo, una mala cosecha, los precios de un determinado producto se desvían del equilibrio, el propio sistema genera fuerzas recuperadoras, como lo hace un muelle mecánico, que devuelven la situación al equilibrio. En este esquema, las desviaciones pequeñas tienen consecuencias pequeñas. También son posibles situaciones en las que los precios oscilan periódicamente, en ciclos de duración fija, como los de un péndulo. Las grandes depresiones, las quiebras bursátiles y otras contingencias se atribuyen a efectos externos o excepcionales.

Lógicamente, el mundo no es perfecto, ni los agentes económicos operan siempre de manera completamente racional. Debido a ello, los precios nunca están en el equilibrio, sino que fluctúan. Durante buena parte del siglo xx se pensaba que estas fluctuaciones eran aleatorias y su origen realmente indeterminable. Por esta razón, los economistas consideraban modelos gaussianos de las fluctuaciones económicas. En un modelo gaussiano las fluctuaciones se distribuyen siguiendo la conocida campana de Gauss en torno al valor medio (figura 3, izquierda). Cuanto más grande sea una fluctuación más improbable es, mientras que las fluctuaciones pequeñas, por encima o por debajo del valor medio, son las que ocurren con mayor probabilidad. En la primera gráfica de la figura 3 se ha considerado que el valor medio es cero, y  $P(x)$  es la probabilidad de una fluctuación de valor  $x$ . En la gráfica de la derecha hemos representado el histograma de los precios diarios del barril de petróleo Brent entre enero de 2013 y junio de 2014. El histograma se construye anotando en el eje de ordenadas el número de veces que el precio toma un valor dentro del rango expresado por las divisiones del eje de abscisas. Por ejemplo, durante ese periodo de tiempo el precio del barril estuvo entre 110 y 111 dólares por barril 60 veces, y



Campana de Gauss (izquierda) e histograma del precio diario del barril de petróleo entre enero de 2013 y junio de 2014 (derecha).

entre 96 y 97 dólares una sola vez. Si los precios del petróleo fluctuaran siguiendo una distribución gaussiana, el histograma debería parecerse a la curva de la izquierda. Cabría pensar que la diferencia se debe a un número insuficiente de datos y que, tal vez, si tomáramos una serie de varios años en lugar de los 18 meses escogidos, el histograma se acercaría cada vez más a la campana de Gauss. Pero no es así.

Varios años antes de acuñar el término *fractal*, Benoît Mandelbrot comprendió que los precios de los productos no fluctuaban siguiendo una campana de Gauss. En los años sesenta del siglo pasado, Mandelbrot analizó la evolución de los precios del algodón en Estados Unidos durante varias décadas y demostró que las fluctuaciones no se ajustaban a la campana de Gauss, como muchos esperaban. En particular, las fluctuaciones grandes se presentaban con más frecuencia de lo que predeciría una campana de Gauss. Mandelbrot descubrió que las fluctuaciones seguían una ley que presentaba la misma forma a distintas escalas, como sus fractales años más tarde. Los precios seguían un mismo patrón ya se analizaran por día, por semana, por mes o

por año. Esto se corresponde con una ley en la que las fluctuaciones grandes, aunque menos probables, siempre son posibles. Es una ley similar a la que siguen los terremotos y otros fenómenos catastróficos (los grandes terremotos son mucho menos probables que los poco intensos, pero ocurren, luego su probabilidad no es nula).

La irrupción de la teoría del caos determinista en diversos campos a finales de los años ochenta del siglo pasado llevó a algunos economistas, y también a físicos y matemáticos, a probar las nuevas herramientas matemáticas en el campo de la economía. Tal vez las fluctuaciones de los precios de los productos, los tipos de interés o el valor de los índices bursátiles no eran el resultado de fluctuaciones aleatorias de causa desconocida sino resultado de una dinámica interna. Si esto era así, tal vez sería posible determinar la dimensión del atractor fractal y construir modelos sencillos, de solo unas pocas variables, que dieran cuenta de toda la dinámica observada.

En los casi treinta años pasados desde la aparición del caos determinista, los métodos de análisis han experimentado un enorme desarrollo. Cientos de series de datos se han sometido a escrutinio, buscando exponentes de Liapunov, dimensiones fractales varias, información y otras cantidades relacionadas con el caos determinista. Pero los resultados son poco concluyentes. Muchas veces las series de datos no son suficientemente largas como para obtener resultados precisos. Otras veces están sujetas a errores diversos, ya sea por la propia medida de la variable económica considerada (por ejemplo, el producto interior bruto de un país puede depender de los criterios seguidos para calcularlo, y estos pueden diferir entre países o entre épocas) o por falta de fiabilidad de los agentes que las proporcionan.

Lo cierto es que en ningún caso se puede afirmar con total certeza que determinado sistema económico sigue las leyes de un sistema caótico determinista. La situación difiere aquí de la que ocurre en otras áreas, como la física o la química, donde experimentos bien controlados en el laboratorio han demostrado sin ningún género de dudas la existencia de caos determinista en muy diversos sistemas.

Pero si bien el análisis de datos reales no ha arrojado conclusiones significativas, el caos determinista ha aportado a la economía ideas y conceptos que llegaron para quedarse. El más importante de todos es el de la no linealidad. Si a mediados del siglo xx muchos economistas consideraban que los modelos lineales podían explicar los aspectos generales fundamentales de la dinámica económica, hoy en día existe un consenso general acerca de la importancia de las interacciones no lineales entre los agentes económicos.

## EL PROBLEMA DE LA LIBERTAD

Aunque históricamente el problema de la libertad del ser humano y el libre albedrío se ha considerado una cuestión filosófica, el avance de las ciencias experimentales durante el siglo xx ha hecho que se convierta en tema de interés para la ciencia, especialmente para la psicología y, más recientemente, la neurofisiología. Los filósofos de todas las épocas se han apoyado en la física y las matemáticas para fundamentar sus posturas al respecto. Así, durante los siglos del determinismo newtoniano, los conceptos de espacio y tiempo absolutos y el mecanicismo influyeron en los filósofos afines, sobre todo en aquellos que defendían la predeterminación. La posibilidad de que el ser humano sea libre y tenga o no libre albedrío está relacionada con el determinismo. Si la naturaleza es o no determinista y en qué grado, es una cuestión que no se puede ignorar a la hora de hablar sobre la libertad humana.

El determinismo absoluto de la mecánica clásica, tal y como lo expresó Laplace en su tratado sobre las probabilidades, no es compatible con la libertad del ser humano, ni con la capacidad del libre albedrío. Según decía Laplace:

Una inteligencia que, en un instante dado, conociera todas las fuerzas de que la naturaleza está animada, y la situación respectiva de los entes que la componen; si además esa inteligencia fuera lo suficientemente vasta como para analizar

todos esos datos y abarcar en una misma fórmula los movimientos de los cuerpos más grandes del universo así como del átomo más ligero, entonces nada sería incierto para ella, y tanto el futuro como el pasado se harían presentes ante sus ojos.

Laplace contemplaba así la posibilidad, compatible con la mecánica newtoniana, de calcular con absoluta precisión el movimiento futuro de un cuerpo, conocidas las fuerzas a las que está sometido y su posición y velocidad iniciales. Hay que decir que, aunque esta sentencia ha quedado para la historia como la definición del determinismo absoluto, el objetivo de Laplace al poner este ejemplo era precisamente el de ilustrar su imposibilidad práctica y la necesidad de acudir al cálculo de probabilidades en muchas facetas de la vida real.

Ese determinismo absoluto, así expresado, hace inútil cualquier intento por nuestra parte de escapar a nuestro destino. Si las cosas fueran realmente así, todo estaría escrito y nada de lo que nosotros hiciéramos podría cambiar el futuro. Incluso nuestros intentos por cambiarlo no harían sino propiciar lo programado, de modo parecido a lo que ocurre con los protagonistas de la película *Terminator*: sus actos no hacen sino provocar lo que quieren evitar.

Pero desde finales del siglo xix la física ha ido alejándose cada vez más de esa posición. Primero con Boltzmann, que introduce el concepto de probabilidad para explicar las magnitudes termodinámicas, como la temperatura, pero sobre todo con la aparición de la mecánica cuántica, en la que la probabilidad figura en el mismo núcleo de sus fundamentos teóricos. La mecánica cuántica calcula probabilidades. Por ejemplo, no predice en qué instante va a desintegrarse un núcleo inestable, sino que proporciona la probabilidad de que eso ocurra. A la postre, y aunque parezca contradictorio, las predicciones de la física cuántica se encuentran entre las más precisas que ha producido nunca la física, ya que lo normal no es observar un evento aislado, como la desintegración de un átomo, sino una gran cantidad de eventos, por lo que normalmente se miden

promedios. En cualquier caso, la mecánica cuántica no es una teoría determinista.

Pero no solo la física cuántica excluye el determinismo absoluto de Laplace. Como apreció el filósofo Karl Popper, la misma teoría especial de la relatividad lo excluye. En la teoría de la relatividad, la velocidad de la luz es un límite máximo a la

rapidez con que se puede transmitir la información de un punto a otro. Por eso, la inteligencia imaginaria de Laplace no podría conocer en un instante dado el estado de todos los cuerpos que pudieran influir en ella en un futuro, por lo que no podría conocer las condiciones iniciales para realizar los cálculos necesarios para adivinarlo.

Por todas estas razones, la mayoría de los físicos de mediados del siglo xx excluían el determinismo absoluto como categoría filosófica. A pesar de ello, la física cuántica se aplica al mundo microscópico, y la teoría de la relatividad, a los dos extremos de la escala del mundo conocido: el microcosmos y las grandes estructuras del universo. La física del mundo macroscópico, el de la vida cotidiana, seguía siendo determinista.

Pero, si un mundo absolutamente determinado excluye la posibilidad de la libertad humana, un mundo completamente aleatorio también lo haría. En efecto, si los acontecimientos se sucedieran sin ninguna ley y fueran completamente impredecibles, nuestras acciones no servirían de nada. Elegir llevar a cabo o no una determinada acción no tendría las consecuencias previstas y nos dejaría igual que si no hubiéramos decidido.

En lo que a la física se refiere, el caos determinista viene a ofrecer el marco justo que hace posible la libertad: no todo está escrito, pero hay reglas, estructuras dinámicas, que hacen que el mundo no sea aleatorio. En estas circunstancias es posible prever lo que puede ocurrir, calcular o estimar la probabilidad de que ocurra, y elegir si se trata de evitar o no.

**El determinismo no implica que cualquier cosa que hagamos no podría haber sido hecha de otro modo, que todo suceso tenga una causa o que nuestra forma de ser esté fijada.**

**DANIEL DENNETT, FILÓSOFO ESTADOUNIDENSE**

Y esa elección tendría efecto en el futuro, de acuerdo con las propias leyes de la naturaleza. Si esa libertad existe de verdad o no, si es o no una ilusión, como creen algunos eminentes neurofisiólogos, es una discusión que excede los propósitos de esta obra.

## LECTURAS RECOMENDADAS

---

GLEICK, J., *Caos: la creación de una ciencia*, Barcelona, Crítica, 2012.

LEÓN, M. DE Y SANJUÁN, M.A.F., *Las matemáticas y la física del caos*, Madrid, CSIC/Los libros de la Catarata, 2009.

LORENZ, E., *La esencia del caos*, Madrid, Debate, 2000.

LORENZO, J. DE, *Poincaré. Matemático visionario, politécnico esceptico*, Madrid, Nivola, 2009.

MANDELBROT, B., *La geometría fractal de la naturaleza*, Barcelona, Tusquets, 1997.

—: *El fractalista: memorias de un científico inconformista*, Barcelona, Tusquets, 2014.

MARTÍN, M.A., MORÁN, M. Y REYES, M., *Iniciación al caos*, Madrid, Síntesis, 1995.

PRIGOGINE, I., *Las leyes del caos*, Barcelona, Crítica, 2008.

STEWART, I., *¿Juega Dios a los dados?: la nueva matemática del caos*, Barcelona, Crítica, 2001.

aplicación logística 53, 58, 69, 70, 71, 73, 100  
Arnold, Vladimir 122  
asteroides 22, 25, 120  
cinturón de 22, 23  
atractor 83, 91, 93, 96-98, 100, 103-105, 107, 108, 154, 155, 161  
extraño 10, 11, 93, 96, 97, 103, 104, 105, 108, 115, 128, 158  
autosimilaridad 9, 59, 60, 71, 76, 80, 86, 88, 104, 128  
Belousov-Zhabotinsky 157  
Bénard, Henri 61-65, 67, 68  
celdas de 62-64  
bifurcación 58, 60, 65, 69-74, 94  
billar cuántico 137, 144, 145  
Bohr, Niels 129, 134  
Boltzmann, Ludwig 8, 163  
Bourbaki, Nicolas 85, 87  
Bureau des Longitudes 27, 30, 33  
Cantor, Georg 84  
cascada subarmónica 58, 73, 74, 76  
Chua, Leon 153-155  
conservativo 11, 114  
determinismo 7, 8, 12, 162-164  
dimensión fractal 80, 82, 86, 87, 108  
dinámica de poblaciones 10, 51, 58, 156  
*double-scroll* 154  
eclipse 7, 106, 110

ECMWF 38, 39  
ecuación  
de ondas 139  
diferencial 28, 29, 90, 118  
efecto mariposa 9, 109, 110  
ENIAC 37  
enredo homoclinico 127, 128  
Escuela Normal Superior 61,  
65, 66, 85  
espacio de las fases 31, 32,  
91, 92, 94, 96, 98, 115-119,  
122, 126, 130-132  
  
Feigenbaum, Mitchell 10, 58,  
69-74, 76, 100  
diagrama de 58, 59, 60, 65,  
72, 80, 104  
fotocopiadora reductora  
múltiple 79-81, 83, 108  
fractal 11, 79, 80, 83, 84, 86,  
87, 90, 103-105, 108, 115,  
160, 161  
función de onda 131-133, 136,  
138, 139, 141, 143  
  
Gutzwiller, Martin 144, 145  
  
hamiltoniano 114, 115, 121,  
122, 124, 128, 137  
Heisenberg, Werner 8, 129,  
130, 133  
helio 65, 66, 68-70, 73, 93  
Hénon, Michel 103, 104  
heteroclinia 126, 128, 132  
homoclinia 126-128  
  
Júpiter 17-19, 22, 23, 25, 33

Kant, Immanuel 17  
Kolmogorov, Andrei 121-123,  
151, 152  
  
Lagrange, Joseph Louis 27,  
30  
Laplace, Pierre Simon de 17,  
18, 27, 30, 162-164  
Laskar, Jacques 30, 32, 33  
Le Verrier, Urbain 18, 24  
Liapunov, Aleksandr 106  
exponentes de 106, 107,  
161  
Libchaber, Albert 65, 66, 68-  
70, 73, 93  
Lorenz, Edward 9, 10, 38, 40-  
43, 90, 93-95, 97, 98, 103,  
106, 108-110, 154  
Los Álamos 37, 69, 70  
  
Malthus, Thomas 48, 50-54  
Mandelbrot, Benoît 83, 85-90,  
160  
May, Robert 10, 51, 52, 54-58,  
60, 61, 69-71, 73, 100, 155  
meteorología 40, 97, 109  
microdispositivo 12, 144, 152  
Moser, Jürgen 123  
  
Newton, Isaac 7, 16, 17, 30,  
33, 73, 137  
  
órbita 10, 16-25, 33, 34, 99,  
113, 114, 120-122, 125, 126,  
132, 137, 141, 144, 145  
Osborne, Reynolds 150  
Óscar II 8, 18, 126, 128

péndulo 10, 114-119, 121-123,  
126, 128-131, 134, 145, 159  
Perelman, Grigori 100  
Planck, Max 129-131, 135  
Poincaré, Henri 8-10, 18-20,  
24, 25, 27, 30, 85, 98-100,  
109, 110, 122, 123, 126-129  
mapa de 118-121, 123, 128,  
129  
principio  
de incertidumbre 8, 130,  
133, 136  
de indeterminación 133  
(véase también principio  
de incertidumbre)  
proporción áurea 124, 125  
  
Qi 15  
  
Rayleigh-Bénard 64-68, 93  
renormalización 71  
resonancia 20-22, 24, 25, 33,  
120-124  
Richardson, Lewis Fry 34-37,  
40, 87, 96, 97  
Rössler, Otto 104  
  
Saturno 17, 18, 23  
Schrödinger, Erwin 129-132,  
136, 139  
sensibilidad a las condiciones  
iniciales 9, 11, 25, 26, 31,  
42, 43, 59, 76, 90, 98, 103,  
106, 109, 110, 136, 137, 139  
  
sistema dinámico 48, 50, 51,  
53, 58, 83, 91, 99, 100, 103,  
104, 106, 156, 157  
discreto 48, 100, 103  
Smale, Steven 99, 100, 102,  
103  
herradura de 100, 101, 103,  
104  
Strutt, John William (lord  
Rayleigh) 64, 67  
  
teorema KAM 121, 123-125  
trayectoria 7, 8, 10, 11, 19, 20,  
25, 26, 30-32, 70, 91, 92, 96,  
98, 104, 106-108, 114, 116,  
118-120, 122-124, 126-128,  
130-132, 134, 136-141, 144,  
145  
triángulo de Sierpinski 79-83,  
104, 108  
  
universalidad 69, 73, 74, 76  
  
Venus 23, 32, 33  
von Neumann, John 37, 38,  
40  
  
Wigner, Paul 142, 143

# La teoría del caos

En las primeras décadas del siglo xx la física vivió dos grandes revoluciones: la teoría de la relatividad y la mecánica cuántica. En las últimas décadas del siglo tuvo lugar otra revolución: la teoría del caos determinista. Los científicos de varias disciplinas descubrieron que sistemas relativamente simples cuya evolución estaba determinada por leyes precisas podían mostrar un comportamiento irregular o caótico. Entre las características de los sistemas caóticos están la sensibilidad a las condiciones iniciales, el conocido como «efecto mariposa», y la aparición de estructuras fractales, fascinantes objetos matemáticos.

**Alberto Pérez Izquierdo** es catedrático de electromagnetismo en la Universidad de Sevilla.